# Coleção IAB de Seminários Internacionais

# O ENSINO DA MATEMÁTICA NAS SÉRIES INICIAIS

João Batista Araujo e Oliveira (org.)



## O ENSINO DA MATEMÁTICA NAS SÉRIES INICIAIS

## Copyright © 2012 by JM Associados Cedido ao Instituto Alfa e Beto

**Equipe Editorial** 

**Organizador:** João Batista Araujo e Oliveira **Coordenação editorial:** Micheline Christophe

Preparação dos originais: Ana Grillo

Tradução: Thiago Gomide Nasser e Celina Portocarrero

Capa: Samuel de Paula

Diagramação: Samuel de Paula e Erik Pires

Direitos reservados ao Instituto Alfa e Beto. Proibida a reprodução total ou parcial desta obra sem o consentimento por escrito do Instituto.

#### INSTITUTO ALFA E BETO

SCS Ouadra 04 Bloco A nº 209, Sala 303

Ed. Mineiro - Brasília - DF

CEP: 70.304-000 Fone: 0800-940-8024 Site: www.alfaebeto.org.br E-mail: iab@alfaebeto.org.br

## Impresso no Brasil Printed in Brazil

E 56 O ensino da Matemática nas séries iniciais / João Batista Araujo e Oliveira (organizador) – Brasília, DF: Instituto Alfa e Beto,

c2012.

190p.; 16 x 23 cm

(Coleção IAB de Seminários Internacionais)

ISBN 978-85-7977-062-3

#### 1. MATEMÁTICA. 2. ENSINO DA MATEMÁTICA.

I. Oliveira, João Batista Araujo e. II. Coleção de IAB de Seminários Internacionais.

CDD 510.7

#### Índices para catálogo sistemático

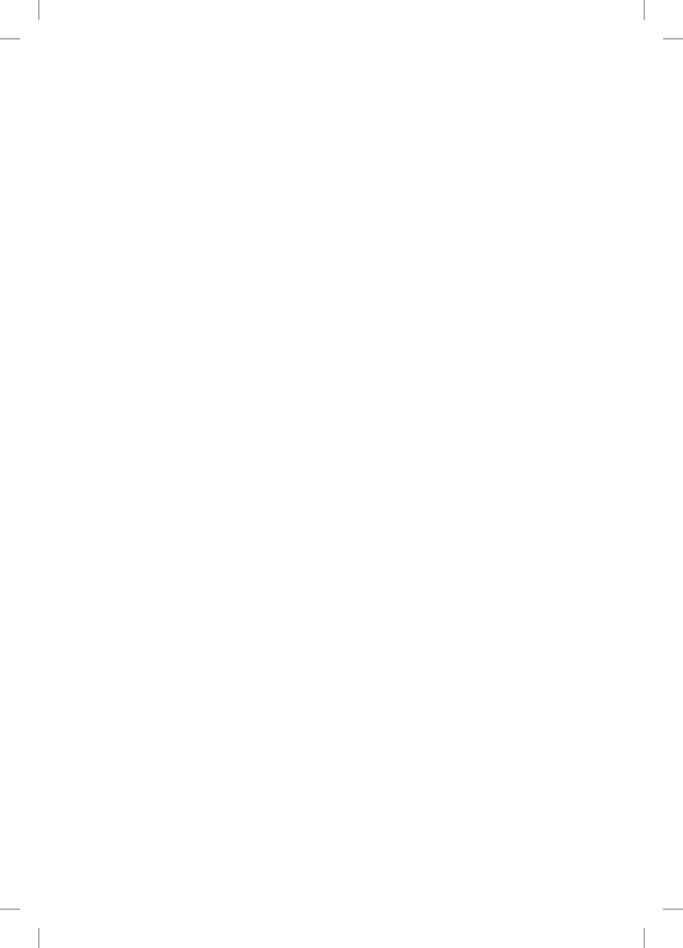
1. Matemática 510 2. Ensino da Matemática 510.7

# Coleção IAB de Seminários Internacionais

# O ENSINO DA MATEMÁTICA NAS SÉRIES INICIAIS

Coleção de artigos apresentados no III Seminário Internacional IAB Ensino de Matemática nas Séries Iniciais, realizado dias 18 e 19 de agosto de 2011, pelo Instituto Alfa e Beto, no Rio de Janeiro.

João Batista Araujo e Oliveira (org.)



# **SUMÁRIO**

NTRODUÇÃO <b>A revolução no ensino da matemática7</b>
CAPÍTULO   O papel da coerência curricular na reforma do ensino da matemática15
CAPÍTULO    "É verdade que algumas pessoas simplesmente não conseguem aprender matemática?" 47
CAPÍTULO     A matemática que os professores das séries iniciais precisam conhecer
CAPÍTULO IV As competências numéricas pré-simbólicas: com base na psicologia cognitiva e na neurociência
Autores-Palestrantes



# A revolução no ensino da matemática

João Batista Araujo e Oliveira

Este livro contém os artigos que foram apresentados e debatidos durante o III Seminário Internacional do Instituto Alfa e Beto. Nesses seminários, trazemos ao Brasil uma síntese do estado-da-arte sobre assuntos específicos de alta relevância para a educação nacional. Nos seminários anteriores desta série tratamos da Leitura desde o Berço e das Pedagogias Eficazes, com ênfase no ensino da linguagem e alfabetização. Neste terceiro seminário tratamos especificamente do ensino da matemática. Em cada seminário procuramos trazer à discussão as descobertas científicas mais atuais e evidências sobre suas aplicações na prática de outros países. Cabe a nós, diante dessas evidências e melhores práticas, tirar as implicações disso para melhorar nossos sistemas de ensino¹.

<sup>1</sup> Com base nos conceitos e princípios apresentados nesse volume, o IAB desenvolveu um currículo completo de matemática, possui um Programa Estruturado de Matemática para as séries iniciais e uma publicação intitulada Matemática para Pais e Professores das Séries Iniciais. O IAB também possui um programa de pré-escola que contempla o desenvolvimento de competências matemáticas. O leitor interessado poderá consultar o site do IAB (www.alfaebeto.org.br).

Os conhecimentos sobre o ensino da matemática evoluíram sensivelmente nos últimos anos. Os autores dos artigos discutem três aspectos práticos desses novos conhecimentos: o que ensinar, como ensinar, o que os professores devem saber. O pano de fundo são os avanços da neurociência, que autorizam e estimulam o ensino da matemática desde cedo e abrem novas fronteiras para o entendimento de como as crianças adquirem as bases que lhes permitem aprender matemática na escola.

O que ensinar? O artigo de Schmidt explora essas questões. Existe um consenso bastante avançado, entre pesquisadores e formuladores de políticas públicas, a respeito do que se deve ensinar de matemática nas séries iniciais. No limite, os alunos devem dominar o suficiente de matemática para poder escolher vertentes do ensino médio mais acadêmicas ou mais aplicadas. Em outras palavras: os jovens só terão reais condições de fazer opções, ao chegar ao ensino médio, se dominarem determinados conhecimentos básicos de matemática.

O consenso a respeito do que se pode e se deve ensinar de matemática nas séries iniciais foi forjado, especialmente nas últimas décadas, a partir das iniciativas do TIMMS (*Third International Mathematical and Science Study*), um consórcio de países e instituições que desenvolveu testes de matemática que serviram de parâmetro para entender com maior precisão o que é preciso e é possível ensinar e aprender nas séries iniciais. Os resultados do PISA (*Programme for International Student Assessment*), por sua vez, levaram diversos países a rever e aprimorar os seus currículos, de forma a atingir níveis mais avançados como os logrados especialmente pelos países asiáticos. A análise comparativa desses currículos mostra que quanto mais enxutos os currículos, melhor o desempenho dos países.

A análise de currículos de matemática e ciências nos países de alto desempenho educativo também tem levado os estudiosos na área a desenvolver critérios técnicos relacionados com a estrutura e sequência de um currículo. O artigo de Schmidt mostra como os conceitos de foco, rigor e consistência têm levado os países educacionalmente mais avançados não apenas a aprimorarem seus currículos, mas ao fazê-lo, também aumentar a convergência sobre o tema. Vale a pena transcrever a definição precisa desses termos:

O foco está relacionado à concentração em temas específicos em momentos específicos. Em vez de um currículo do tipo "muita extensão, pouca profundidade", os alunos devem possuir um embasamento sólido em um tópico antes de passar para outro. O rigor envolve a questão da série na qual se espera que os alunos aprendam um determinado tópico: o que é um assunto apropriado para um aluno de quarta série comprometeria o aprendizado de matemática se o tópico fosse adiado até a oitava série. E, finalmente, há a questão da coerência curricular. Definimos coerência da seguinte forma:

(...) normas de conteúdo curricular, em geral, [são] coerentes se articuladas no tempo como uma sequência de tópicos e habilidades consistentes com a natureza lógica e, se apropriado, hierárquica do conteúdo disciplinar do qual o tema em questão deriva. Isto não sugere a existência de uma única sequência coerente, mas apenas que tal sequência deve refletir a estrutura inerente à disciplina. Isto implica que, para que um conjunto de normas de conteúdo "seja coerente", elas devem evoluir de elementos pontuais (e.g., fatos matemáticos simples e procedimentos computacionais de rotina associados a números inteiros e frações) para estruturas mais complexas. São estas estruturas mais complexas que conectam os elementos pontuais (assim como uma compreensão do sistema de números racionais e suas propriedades). Esta evolução deve ocorrer tanto ao longo do tempo dentro de uma série particular quanto ao longo do avanço sucessivo do aluno entre séries. (Schmidt et al, 2005).

Como ensinar matemática? Sob o provocativo título de "É verdade que algumas pessoas simplesmente não conseguem aprender matemática", Dan Willingham procede de maneira didática para apresentar os resultados das pesquisas da Psicologia Cognitva sobre a aprendizagem e o ensino da matemática. Mas primeiro ele nos faz um alerta: o cérebro possui algumas capacidades naturais para aprender matemática. Como outros animais, o ser humano possui um senso numérico que lhe permite manipular quantidades muito pequenas com precisão e manipular quantidades bem mais altas de forma aproximada. Mas isso é apenas o começo, a base sobre a qual pode se assentar uma boa aprendizagem da matemática, especialmente

da matemática requerida para progredir no ensino médio e no ensino superior. Portanto, não devemos esperar que os alunos aprendam a matemática com facilidade. Ao invés disto, devemos esperar que a proficiência matemática requeira um cultivo cuidadoso e se desenvolva lentamente. Ao mesmo tempo, como sabemos que os alunos nascem com a habilidade de aprender matemática, não devemos deixá-los desistir ao concluir que simplesmente não são bons em matemática.

O ensino da matemática inclui diferentes competências. Uma delas, básica, consiste em memorizar os fatos fundamentais, ou seja, decorar a tabuada. Isso gera enorme economia cerebral. A outra é aprender a fazer as operações. Uma terceira é aprender os conceitos matemáticos, como, por exemplo, as propriedades da multiplicação. Das três, a mais difícil é aprender conceitos, e essa aprendizagem é facilitada pelo conhecimento dos fatos, o domínio das operações e o uso abundante de exemplos familiares.

Eis o que nos diz o professor Williingham: "Para ilustrar a ideia de fração, pode-se dividir um biscoito em dois com o propósito de compartilhá-lo com um aluno. Mas o quanto este exemplo é concreto é provavelmente menos importante do que o quanto ele é familiar. Suponha que eu rasgasse um livro em dois pedaços e dissesse: Viu? Agora existem dois pedaços. Cada um é um meio-livro." Este exemplo é concreto, mas menos eficiente porque não é familiar; o aluno não tem qualquer experiência com livros divididos, e o propósito de compartilhar também não está presente nesse caso. A concretude não é uma propriedade mágica que permite que professores insiram conceitos nas mentes de seus alunos. É a familiaridade que ajuda, porque permite que o professor faça o aluno pensar em coisas que já sabe de novas maneiras. Mas nem tudo se explica com exemplos familiares, o uso de analogias torna-se logo essencial para o aluno conseguir enxergar para além das situações mais tangíveis ou conhecidas. E é aí que entra a competência do professor.

Em seu artigo "A matemática que os professores das séries iniciais precisam conhecer", H. Wu começa pela definição da própria matemática: a matemática é um conjunto de elos encadeados que envolve precisão, definições, raciocínio coerência e uma finalidade. As afirmativas matemáticas são claras e sem ambiguidade. As definições são o esteio de sua estrutura: se elas não forem precisas e rigorosas, não há matemática.

O raciocínio é o seu sistema circulatório, o motor que engendra a solução de problemas. A ausência de raciocínio é a raiz da decoreba. A matemática é coerente, é como um tapete em que todos os conceitos e habilidades são inteligados. Matemática, enfim, tem uma finalidade, todo conceito ou habilidade relacionado a ela tem um propósito.

Seu ensino nas séries iniciais tem por objetivo não apenas ensinar operações básicas, mas preparar futuros técnicos, engenheiros e matemáticos. Para cumprir sua função, o professor deve estar focado no desenvolvimento de mentes precisas e disciplinadas. Isso requer fazer com que o aluno perceba a estrutura, a relação entre as partes e a tessitura do conhecimento matemático – e não se limite a decorar fórmulas ou aprender conteúdos isolados.

Mas para formar mentes disciplinadas, o professor precisa ter sua mente desciplinada, entender a relação entre as partes para explicar, por exemplo, porque um quadrado é um tipo de retângulo, ou para evitar dizer que frações são um tipo diferente de número. Desafio não trivial, porém memos complicado do que parece.

Um dos equívocos na formação dos professores de matemática das séries iniciais é supor que eles precisam saber muita matemática. No Brasil, muitos querem que tenham pós-graduação. Entre os norteamericanos é uma glória ter concluído um curso avançado de álgebra. Nada disso ajuda a ensinar bem. A análise de Wu e as evidências empíricas sugerem algo mais simples: para ser um bom professor nas séries iniciais, o importante é saber bem a aritmética e um pouquinho além, para entender sua relação com os tópicos que a criança aprenderá nas séries posteriores.

Além disso, o professor precisa adquirir outras habilidades, como inventar e contar histórias (os problemas), dar exemplos, elaborar testes, saber dosar os conteúdos e conseguir relacioná-los com seus futuros usos (para que serve isso, professor?).

A didática da matemática, no entanto, é menos pedagogia (aprendizagem de técnicas desencarnadas) do que engenharia, ou seja, um conjunto de orientações que ajudam o aluno a aprender e usar os conteúdos de forma eficiente e a consertar falhas de aprendizagem que eventualmenre venham a ocorrer.

Daqui decorrem duas conclusões. De um lado, a matemática que os professores das séries iniciais precisam saber é umas subdisciplina com conteúdos específico – diferente de cursos avançados de álgebra ou cálculo, mas que precisa ser ensinada e aprendida com o rigor e precisão próprios da área. De outro, a pedagogia de disciplina é inseparável de seu conteúdo: para inventar e contar boas histórias de matemática (cinco passarinhos estavam no poste, três foram embora – quantos ficaram?) ou inventar boas foras de explicar o teorema de Pitágoras, o professor precisa conhecer matemática.

E onde entra o cérebro em tudo isso? Por que são importantes as contribuições da neurociência para avançar nosso conhecimento sobre a aprendizagem e ensino da matemática?

Em seu artigo, Willingham apresenta algumas características do cérebro animal e humano e sua propensão natural à aprendizagem da matemática. Xavier Seron, no artigo final deste livro, faz uma revisão de aspectos selecionados da neurociência contemporânea que estuda as modificações cerebrais que acompanham a aprendizagem da matemática. Esses estudos permitiram, em primeiro lugar, superar um certo imobilismo provocado pelas teorias de Piaget, e que sugeriam que as crianças só poderiam começar a aprender matemática depois de atingirem determinados estágios. Mas há muitas outras implicações práticas que começam a surgir de algumas vertentes de estudos que ainda se encontram em estágio bastante preliminar.

Por exemplo, os dois sistemas naturais de que nos falou Willingham, o sistema aproximativo e o sistema mais preciso, estão sendo associados a progressos posteriores na aprendizagem da matemática. Para alguns autores, o sistema aproximativo constitui a base sobre a qual se constrói a sequência de nossas atividades numéricas; para outros, é o sistema preciso porém limitado que estaria na origem de desenvolvimentos posteriores. Por outro lado, não é proibido pensar que os dois sistemas intervêm no decorrer do desenvolvimento, seja simultaneamente, seja em momentos diferentes.

Outro impacto relevante dos trabalhos recentes é considerar que as crianças possuem determinadas potencialidades muito antes do surgimento das competências simbólicas ou linguageiras precisas. Diversas pesquisas evidenciaram que algumas dessas competências adquiridas muito cedo relacionavam-se ao nível de competência

em aritmética atingido pelas crianças vários anos depois. Isso foi demonstrado para a aritmética aproximativa e para o domínio da contagem usando os dedos. Pesquisas recentes sugerem igualmente que o domínio das relações de ordem seria também um bom prognosticador do desempenho aritmético posterior. Alguns autores já começaram a desenvolver programas de treinamento ou reforço para crianças discalcúlicas, com base nessas descobertas. Este é apenas um dos exemplos do potencial de a neurociência contribuir para diagnósticos e intervenções precoces que ajudem as crianças a formar uma sólida base para a posterior aprendizagem da matemática.

Seron alerta que a questão essencial que devemos considerar e resolver, a fim de melhor compreender que procedimentos deveríamos empregar para nos capacitarmos a ajudar as crianças, é a dos mecanismos que permitem a passagem da cognição numérica não simbólica à cognição simbólica. Entrementes, ele também nos lembra de que as novas descobertas da neurociência não jogaram por terra o que já sabíamos a respeito da importância da memória de trabalho, dos mecanismos de inibição e da contagem no desenvolvimento das habilidades aritméticas.

Este livro pretende servir de subsídio para professores, formuladores de política, pesquisadores e estudiosos da aprendizagem e do ensino da matemática. Mais que isso, pretende servir de estímulo para que a pesquisa e a evidência científica sirvam cada vez mais de fundamento e inspiração para as políticas e práticas de educação em nosso país.



# O papel da coerência curricular na reforma do ensino da matemática<sup>1</sup>

### William Schmidt

# Introdução

A reforma baseada em currículos definidos de acordo com padrões (standard-based) tornou-se um dos ingredientes-chave na política educacional. Por exemplo, desde a aprovação da lei No Child Left Behind - NLCB (Nenhuma Criança Deixada para Trás), o governo federal norte-americano tem se envolvido cada vez mais na tarefa de estimular uma visão de reformas educacionais que coloque em primeiro plano a avaliação e prestação de contas baseadas em padrões. Esta tendência se aprofundou com o advento da iniciativa intitulada Common Core Standards Initiative (Padrões Curriculares Comuns), um esforço por parte de mais de quarenta estados norte-americanos para compor um currículo escolar comum para as disciplinas de matemática e língua inglesa² – um projeto que representa uma brusca ruptura com a longa tradição americana de autonomia local sobre decisões curriculares, e pode ajudar a dissolver a duradoura "visão fragmentada" (Schmidt et al, 1997) a respeito do que os alunos devem aprender e em que série.

<sup>1</sup> Este artigo foi adaptado de um trabalho previamente publicado (Schmidt *et al*, 2002) com a permissão generosa dos editores da revista *American Educator*.

<sup>2</sup> Language arts, termo comumente utilizado nos currículos americanos para designar a disciplina que engloba todas as habilidades linguísticas. (N. do T.)

A manutenção histórica de um conjunto fragmentado de normas educacionais tem colocado os Estados Unidos numa posição à parte de outros países nos quais os governos centrais desempenham um papel bem mais proeminente na definição da política educacional (Schmidt *et al*, 2009). Esses recentes progressos são, portanto, motivo para otimismo. Entretanto, a mera existência de uma estrutura curricular comum não deve ser exageradamente comemorada. Antes de discutirmos quão bem as normas educacionais são implementadas, devemos analisar a *qualidade* desse currículo. A força de seu currículo educacional é provavelmente uma grande preocupação para qualquer país, não só para os Estados Unidos, é claro. Em um período de intensa competição econômica - tanto internamente quanto entre países -, cabe a cada país se perguntar se seu currículo está preparando suficientemente bem seus alunos, em especial no campo da matemática.

Pesquisas internacionais em educação, tais como o Third International Mathematics and Science Study - TIMSS (Terceiro Estudo Internacional em Matemática e Ciências), sugerem que um currículo matemático eficaz e de alta qualidade possui três ingredientes essenciais: foco, rigor e coerência. O foco está relacionado à concentração em temas específicos em momentos específicos. Em vez de um currículo do tipo "muita extensão, pouca profundidade", os alunos devem possuir um embasamento sólido em um tópico antes de passar para outro. O rigor envolve a questão da série na qual se espera que os alunos aprendam um determinado tópico: o que é um assunto apropriado para um aluno de quarta série comprometeria o aprendizado de matemática se o tópico fosse adiado até a oitava série. E, finalmente, há a questão da coerência curricular, que é a ênfase deste capítulo. Definimos coerência da seguinte forma:

(...) normas de conteúdo curricular, em geral, [são] coerentes se articuladas no tempo como uma sequência de tópicos e habilidades consistentes com a natureza lógica e, se apropriado, hierárquica do conteúdo disciplinar do qual o tema em questão deriva. Isto não sugere a existência de uma única sequência coerente, mas apenas que tal sequência deve refletir a estrutura inerente à disciplina. Isto implica que, para que um conjunto de normas de conteúdo "seja coerente", elas devem evoluir de elementos pontuais (e.g., fatos matemáticos simples e procedimentos computacionais de rotina associados a números inteiros e frações) para estruturas mais complexas. São essas estruturas mais complexas que conectam os elementos pontuais (assim como uma compreensão do sistema de números racionais e suas propriedades). Esta evolução deve ocorrer tanto ao longo do tempo dentro de uma série particular quanto ao longo do avanço sucessivo do aluno entre séries. (Schmidt et al, 2005)

Para melhor elaborar o conceito de coerência, consideremos a seguinte analogia envolvendo os setores agrícolas de dois países: no país A, toma-se o que já é conhecido sobre plantio e cultivo e traduz-se isso em diretrizes claras, coerentes e gerenciáveis para a atividade agrícola. Essas diretrizes são distribuídas para todos os agricultores no país. Além disso, o país A disponibiliza para todos os agricultores equipamentos modernos (tratores, enfardadeiras, colheitadeiras etc.) e treinamento para sua utilização, o que lhes permite implementar as orientações contidas nas diretrizes. Assim como em qualquer outro país, alguns agricultores possuem maior habilidade inerente para o cultivo do que outros; eles encontram maneiras de ultrapassar as diretrizes e produzir safras extremamente ricas. Mas a ampla disponibilidade de diretrizes e ferramentas estabelece um limite inferior para a qualidade agrícola. Como resultado, a lacuna entre os agricultores mais e menos eficientes

não resulta muito grande, e a qualidade média da atividade agrícola acaba sendo bastante boa. Além disso, a qualidade média aumenta lentamente à medida que a experiência dos melhores agricultores é incorporada às diretrizes.

No país B, a situação é bem diferente. Regiões, e por vezes cidades, agregam em uma lista as ideias favoritas de todos a respeito da atividade agrícola. A lista é disponibilizada para qualquer agricultor que a solicite, mas cabe a cada um deles desenvolver suas próprias diretrizes com base na lista. As ideias são interessantes, mas há ideias demais para se aproveitar, nenhuma indicação de quais ideias são as melhores, e nenhuma sugestão apontando quais ideias se encaixam com outras. Ademais, colocar em prática as ideias requer ferramentas – e treinamento para sua utilização. Poucos agricultores têm pronto acesso a qualquer um dos dois.

O resultado: alguns poucos agricultores particularmente hábeis no país B deduzem como fazer o cultivo de forma produtiva. Eles são principalmente os agricultores de áreas mais ricas – tiveram a chance de frequentar boas escolas agrícolas locais e podem pagar as ferramentas e equipamentos sugeridos em seu treinamento. Alguns outros agricultores – estes com uma aptidão especial – se saem bem de qualquer maneira, apesar da falta de treinamento e da utilização de equipamentos precários. Mas a maioria das propriedades agrícolas do país B não é particularmente eficiente, certamente não quando comparadas às do país A. No país B, a lacuna entre os agricultores mais e menos eficientes é enorme e a produtividade de uma propriedade mediana é de longe mais baixa do que a da sua contraparte no país A.

Essa analogia explica boa parte das discrepâncias existentes na área de educação e ensino entre os países mais avançados, mas especialmente em relação aos Estados Unidos. Assim como os agricultores do país A, os países com melhor desempenho possuem diretrizes coerentes representadas na forma de uma estrutura curricular nacional. Eles também possuem ferramentas e treinamento formalmente semelhantes — manuais para professores, livros didáticos e livros de exercícios para alunos e treinamentos pedagógicos — que preparam para o ensino do currículo e proporcionam oportunidades de desenvolvimento profissional baseado no currículo. Em contraste, assim como os agricultores do país B, os professores nos Estados Unidos possuem

longas listas de ideias sobre o que deve ser ensinado (leia-se: normas e padrões) e livros didáticos direcionados para o mercado que incluem algo para todos, contudo, muito pouco em termos de orientação, ferramentas ou treinamento.

Por que devemos ficar preocupados se os professores nos Estados Unidos precisam se esforçar um pouco mais para decidir o que ensinar? Uma nova análise de dados do TIMSS fornece evidências de que alunos e professores norte-americanos se encontram em grande desvantagem devido à ausência no país de um currículo comum coerente e de textos, materiais e treinamentos que se ajustem a ele.

Algumas pessoas pensam que o propósito de uma comparação internacional consiste em determinar que país é o melhor e a partir daí fazer com que os outros países emulem suas práticas. Essa ideia é ingênua. Não se pode pinçar algo de um contexto cultural e esperar que funcione em outro. Mas a pesquisa internacional pode nos levar a questionar algumas de nossas suposições sobre educação e considerar alternativas ao que estamos fazendo.

Primeiramente, revisaremos de forma breve o que é o TIMSS e suas descobertas até o momento, as quais foram publicadas em uma série de relatórios anteriores. Depois disso passaremos às nossas mais recentes descobertas em relação aos currículos matemáticos da primeira à oitava série, a partir dos quais podemos notar que os países de alto desempenho adotam um currículo matemático essencial, com um núcleo muito similar e coerente, para todos os seus alunos — e os Estados Unidos, decidida e claramente, não fazem o mesmo. Por fim, iremos notar a importância dessa descoberta ao examinar os benefícios em cadeia que resultam da elaboração de um currículo comum e coerente.

# 1. As descobertas iniciais do TIMSS

O TIMSS é o mais extenso e abrangente estudo comparativo internacional já empreendido. Ele foi conduzido em 1995, com 42 países participando em pelo menos alguma parte do estudo. O TIMSS testou três populações amostrais de alunos: aqueles que tinham em sua maior parte 9 anos (terceira e quarta séries nos Estados Unidos); aqueles cuja maioria tinha 13 anos (sétima e oitava séries nos Estados Unidos);

e alunos no último ano do ensino médio (12ª série nos Estados Unidos). Além dos testes com os alunos, o estudo incorporou uma grande quantidade de outros dados, incluindo extensas análise de currículos. Descobertas resultantes do estudo de currículos são o cerne deste capítulo mas, primeiro, façamos uma revisão do que já foi relatado nas publicações acadêmicas sobre o TIMSS.

#### A corrida de cavalos

A corrida de cavalos — quem chega em primeiro, segundo, ou terceiro lugar — não é particularmente importante por si só. Na verdade, o ranking dos países é simplesmente a maneira mais simples de atrair a atenção das pessoas.

Na quarta série, os Estados Unidos apresentaram um desempenho razoavelmente bom no exame do TIMSS. Os alunos obtiveram pontuações acima da média internacional nas áreas de matemática e ciências. Em matemática, o desempenho foi apenas bom; foi acima da média, embora não estivesse na faixa superior entre os países. (Resultados detalhados, incluindo tabelas e gráficos, podem ser encontrados na página na internet: http://ustimss.msu.edu, ou na página do TIMSS no Departamento de Educação dos Estados Unidos, http://nces.ed.gov/timss).

Na oitava série, entretanto, os Estados Unidos caíram para a média internacional, ficando ligeiramente acima da média em ciências e ligeiramente abaixo em matemática. Em outras palavras, ao longo de apenas quatro anos escolares, as pontuações dos Estados Unidos caíram para a média ou para abaixo da média. O declínio continua de forma que até o final do ensino médio o desempenho escolar fica perto da faixa inferior da distribuição internacional. Em matemática e ciências, um típico aluno recém-formado norte-americano terá superado alunos de apenas dois outros países: Chipre e África do Sul.

Algumas pessoas podem se perguntar: "Que diferença faz se os alunos não podem resolver problemas sofisticados de matemática?" Faz diferença. Um item típico do exame de matemática de 12ª série do TIMMS mostra um presente embrulhado em um pacote retangular, fornece sua altura, largura e comprimento, assim como a quantidade de fita necessária para fazer um laço, e pergunta qual a quantidade total de fita que seria necessária para embrulhar o presente e incluir um laço.

Os alunos precisam simplesmente fazer um traço lógico ao redor do pacote, somando os comprimentos separados de forma a dar a volta nas duas direções, e depois adicionar o comprimento necessário para o laço. Ainda assim, apenas um terço dos graduandos americanos consegue resolver esse problema. Isso é grave.

Outra parte do estudo do TIMSS sobre a 12ª série envolveu alunos mais avançados, cursando disciplinas como cálculo ou física preparatória para a faculdade. Os resultados são bastante surpreendentes: os Estados Unidos também se encontram na faixa mais baixa desta distribuição internacional. No passado, quando resultados internacionais foram reportados, muitas pessoas sugeriram: "Isso não é realmente um problema, porque nossos melhores alunos estão indo bem." Isso simplesmente não é verdade. Uma comparação das pontuações de 22 países em matemática revelou que os alunos americanos de oitava série que atingiram o 75% percentil ficaram, na verdade, bem abaixo do 75º percentil de 19 outros países. Os resultados mais drásticos foram em comparação à Cingapura – a pontuação do 75º percentil nos Estados Unidos ficou abaixo do 25º percentil de Cingapura. Os problemas que devemos enfrentar afetam não só nossos alunos médios, mas até mesmo aqueles que estão acima da média.

## A estrutura curricular importa: o que você ensina é o que você colhe

Estes resultados da corrida de cavalos são interessantes e inquietantes. Mas eles ocultam outros resultados importantes que, acreditamos, podem ajudar a compreender o baixo desempenho e apontar a chave para a solução deste problema. Para realmente entender os resultados do TIMSS, deve-se examinar o desempenho dos alunos em diferentes partes do currículo nas áreas de matemática e ciências.

Quando se analisa o desempenho dos alunos de oitava série em diferentes partes do conteúdo de matemática e ciências, descobre-se que o desempenho nos Estados Unidos apresenta grandes variações de tópico a tópico. O mesmo se aplica a virtualmente todos os outros países. Por exemplo, Cingapura ficou em primeiro lugar em ciências na oitava série, mas seus alunos não ficaram em primeiro lugar em todas as diferentes áreas de ciências.

Uma das descobertas mais importantes do TIMSS é a de que as diferenças de desempenho entre os diversos países estão relacionadas ao

conteúdo que é ensinado em cada um deles. Em outras palavras, este não é primordialmente um problema relacionado a variações demográficas ou outras variáveis que não são fortemente afetadas pela educação escolar. O que podemos ver no TIMSS é que a educação escolar faz diferença. Mais especificamente, podemos ver que o currículo propriamente dito — aquilo que é ensinado—faz uma enorme diferença.

Considere o desempenho de alunos búlgaros em ciências. Eles ficaram no topo entre todos os países do mundo na área de estrutura da matéria, mas quase em último lugar na área de mudanças físicas (physical changes). Considere, também, as extraordinárias variações de desempenho em matemática nos Estados Unidos. Alunos da oitava série se saíram melhor na área de arredondamento. Mas com base nos resultados do TIMSS, pode-se dizer que os alunos americanos claramente não estão fazendo um trabalho adequado nas áreas de medidas; perímetro, área e volume; e geometria.

Essas descobertas emergiram de uma linha de pesquisa realizada a partir do TIMSS, e que examinou o que é ensinado em 37 países. Para retratar de forma mais completa o ensino da matemática em cada país, nós olhamos para o conteúdo "pretendido" — isto é, o que profissionais da educação propõem que seja ensinado pelos professores; e para o conteúdo "posto em prática" — isto é, o que os professores ensinam de fato em suas salas de aula. Na maior parte dos países, o conteúdo proposto era simplesmente aquele contido no currículo nacional. Mas em um punhado de países que não possuem um currículo nacional nós procuramos outros tipos de declaração formal de conteúdo proposto regional ou localmente. Por exemplo, nos Estados Unidos nós examinamos currículos estaduais e distritais. Em todos esses países nós determinamos o conteúdo que é posto em prática através de um levantamento junto aos professores a respeito dos pontos que eles acreditavam ter ensinado. Informações adicionais a respeito do que é ensinado vieram de uma revisão de vários dos principais livros didáticos de cada país e, em alguns países, de observações em sala de aula.

Com base nesses estudos sobre conteúdo "proposto" e "posto em prática" na área de matemática, podemos fazer algumas asserções gerais. Sabemos que, na maioria dos países estudados, o conteúdo proposto que é formalmente promulgado (em nível nacional, regional ou estadual) é essencialmente replicado nos livros didáticos do país. Podemos dizer

também que, na maior parte desses países, os professores "seguem" os livros didáticos. Com isso queremos dizer que eles cobrem o conteúdo do livro-texto e são guiados pela profundidade e duração de cada tópico no livro. A partir disso, podemos dizer com confiança estatística que aquilo que está determinado no conteúdo proposto (seja na forma de um currículo nacional ou de programas estaduais) e nos livros didáticos é, em grande parte, ensinado nas salas de aula de quase todos os países do TIMSS. Conhecendo esses fatos, podemos estabelecer conexões entre os pontos fortes e fracos que os alunos de um país apresentam em determinados tópicos e os pontos fortes e fracos correspondentes no conteúdo proposto. Em resumo, nosso estudo mostra claramente que o currículo importa. Se um país demanda que seus professores ensinem um determinado conjunto de tópicos em uma determinada série, isto é provavelmente o que os professores ensinarão — e, no final das contas, isto é o que os alunos provavelmente aprenderão. Isso se mostrou verdade mesmo depois de controlarmos o fator relacionado à posição socioeconômica dos alunos (Schmidt et al, 2001).

# Currículos nos Estados Unidos: muita extensão, pouca profundidade

Com base nessas primeiras análises dos dados do TIMSS, podemos caracterizar o conteúdo proposto de matemática (conforme indicado em conjuntos de currículos e livros didáticos) nos Estados Unidos, em relação a outros no mundo, de quatro formas:

1. O conteúdo proposto não tem foco. Ao analisar os currículos estaduais, encontram-se mais tópicos em cada série do que em qualquer outro país. Analisando os livros didáticos americanos, descobrese que não há absolutamente nenhum livro-texto no mundo que englobe tantos tópicos. Na verdade, de acordo com os dados do TIMMS, livros didáticos de matemática de oitava série no Japão incluem em torno de dez tópicos, enquanto nos Estados Unidos eles possuem mais de trinta tópicos. E finalmente, ao fazer uma análise das salas de aula, nota-se que professores nos Estados Unidos cobrem mais tópicos do que professores de qualquer outro país.

- 2. O conteúdo proposto é altamente repetitivo. Tópicos são introduzidos cedo e então repetidos ano após ano. Para piorar a situação, muito pouca profundidade é acrescentada a cada vez que o tópico é tratado porque, a cada ano, muito do tempo é dedicado à revisão do tópico.
- 3. O conteúdo proposto não é muito exigente, a julgar pelos padrões internacionais. Isso é especialmente verdade nos anos compreendidos na *middle-school* [equivalentes a sexta, sétima e oitava séries no Brasil], quando o desempenho relativo dos alunos nos Estados Unidos entra em declínio. Durante esses anos, o resto do mundo desloca sua atenção da aritmética básica e da ciência elementar para conceitos iniciais de álgebra, geometria, química e física.
- 4. O conteúdo proposto é incoerente. A matemática, por exemplo, é na realidade um punhado de ideias básicas; mas, nos Estados Unidos, os programas de ensino da matemática são longas "listas de supermercado" de tópicos separados, aparentemente desconexos. Nossa análise mais recente terá mais a dizer a esse respeito, que retomaremos na próxima seção.

Como resultado desses currículos e livros didáticos mal concebidos, o currículo que é posto em prática nos Estados Unidos (em comparação ao resto do mundo) é altamente repetitivo, sem foco, pouco desafiador e incoerente, especialmente durante a sexta, sétima e oitava séries. Há uma implicação importante aqui. Os professores dos Estados Unidos trabalham em um contexto que demanda que eles ensinem muitas coisas, mas nada em profundidade. O país possui programas e currículos que se caracterizam por apresentar "muita extensão, pouca profundidade".

Uma reação comum a um estudo como o do TIMSS é a de culpar os professores. Mas os professores nos Estados Unidos estão simplesmente fazendo aquilo que lhes foi requisitado que fizessem: "Ensine tudo que puder. Não se preocupe com profundidade. Seu objetivo é ensinar 35 coisas brevemente, e não 10 coisas bem."

# 2. Metodologia

A discussão dos resultados de desempenho do TIMSS induziu os formuladores de políticas públicas nos Estados Unidos e em outros países a se perguntarem o que significa possuir um currículo de padrão internacional. Para responder a essa pergunta, analisamos os currículos de matemática dos países de melhor desempenho no TIMSS para apurar com mais exatidão o que eles consideram conteúdo essencial para praticamente todos os alunos³ nas diferentes séries escolares. Com essa análise, podemos ir além da crítica do "currículo de muita extensão e pouca profundidade" e olhar para o caráter e o conteúdo de um currículo de classe mundial (Schmidt *et al*, 2005).

Após identificar os países de melhor desempenho (ou A+) e delinear uma metodologia para determinar os tópicos que eram comuns a seus currículos, desenvolvemos um conjunto de tópicos combinados – um compósito – que consiste dos tópicos que ao menos dois terços dos países A+ incluíam em seus currículos. Esse "compósito A+" está apresentado na Figura 1. Em seguida, compósitos dos currículos de Matemática de 21 estados (Figura 2) e 50 distritos (Figura 3) nos Estados Unidos foram desenvolvidos e comparados com o composto A+.

Para identificar os países com melhor desempenho (A+) em matemática, estabelecemos um ranking ordenando as pontuações correspondentes à oitava série, da mais alta até a mais baixa. Comparamos então a pontuação de cada país com as pontuações de todos os outros países para determinar quais deles se destacavam significativamente do ponto de vista estatístico. Os seguintes países, que superaram estatisticamente pelo menos outros 35 países, se tornaram os países A+: Cingapura, Coreia, Japão, Hong Kong, Bélgica (de língua flamenca), e República Tcheca (Valverde e Schmidt, 2000).

Para analisar o conteúdo proposto dos países A+, um procedimento denominado *General Topic Trace Mapping* – GTTM (Mapeamento e

<sup>3</sup> Em cada um destes países existe um documento delineando o conteúdo que deve ser ensinado a praticamente todas as crianças no sistema escolar. Alguns alunos podem receber problemas adicionais mais avançados para tópicos específicos. Em Hong Kong, por exemplo, os livros didáticos podem indicar problemas de Nível 2 que os professores são encorajados a passar para seus alunos mais avançados. Mas o compósito apresentado na Figura 1 se baseia no material ao qual todos os alunos estão expostos.

Rastreamento Geral de Tópicos) foi empregado. Especialistas da área de educação receberam extensas listas de tópicos em matemática e requisitou-se que eles utilizassem seus currículos nacionais como base para indicar, para cada série, se determinado tópico estava ou não sendo ensinado. O resultado foi um mapa que refletia a cobertura de cada tópico na série em questão, para cada país. Embora nenhum dos mapas dos países fosse idêntico a outro, os mapas de todos os países A+ exibiam fortes similaridades.

Os mapas de tópicos dos países A+ foram sintetizados para desenvolver um compósito de tópicos propostos por pelo menos dois terços dos países A+ (ver Figura 1). A síntese foi feita em três passos. Primeiro, determinamos o número médio de tópicos propostos em cada série nos países A+. Como segundo passo, ordenamos os tópicos de cada série com base na percentagem de países A+ que incluíam cada tópico particular em seus currículos. Por exemplo, como todos os países incluíram o tópico "significado dos números inteiros" na primeira série, este tópico foi colocado no topo da lista correspondente à primeira série. No terceiro passo, utilizamos as informações dos passos um e dois para desenvolver o compósito A+. A cada série, o compósito não deveria incluir mais do que o número médio de tópicos propostos. Além disso, o compósito deveria incluir somente tópicos que eram propostos por pelo menos dois terços dos países A+. Portanto, os tópicos propostos pela maior percentagem de países foram selecionados para o compósito em primeiro lugar, e foi escolhido um número de tópicos equivalente à média de tópicos propostos para cada série nesse conjunto de países. Assim, os tópicos no compósito A+ constituem o "currículo essencial". Além desses tópicos essenciais, cada país ensinava tópicos adicionais. O número de tópicos adicionais propostos em cada série pode ser encontrado na última linha da Figura 1.

Os dados a respeito dos padrões de conteúdo em matemática nos Estados Unidos foram coletados a partir de duas fontes: uma amostra dos currículos de 21 estados e uma amostra dos currículos de 50 distritos. Esses dados indicaram tópicos propostos para o ensino em cada série até a oitava.

Pelo fato de os Estados Unidos possuírem tantos conjuntos de currículos, a utilização do procedimento de "Mapeamento e Rastreamento Geral de Tópicos" teria sido bastante difícil. Em vez de consultar os

técnicos dos ministérios de educação a respeito dos conteúdos propostos, programadores (alunos de pós-graduação com diplomas de matemática, engenharia e outras áreas científicas) compararam os documentos que contêm os programas, referenciados acima, com a mesma lista extensa de tópicos matemáticos que foi usada para o GTTM. Padrões mais complexos eram identificados quando havia mais de um tópico que poderia ser apropriado para sua caracterização. Uma vez que os currículos foram codificados por tópico, compósitos estaduais e distritais foram desenvolvidos da mesma maneira que o compósito A+.

Ao se examinar o compósito A+, é preciso ter em mente que este formato representa um componente "essencial", um núcleo, e não um currículo completo. Nosso objetivo ao desenvolver o compósito era descobrir que tópicos pelo menos dois terços dos países A+ acreditavam ser essenciais. De forma não surpreendente, a existência de pontos de concordância entre esses países resultou em um número menor de tópicos no nosso composto do que qualquer um desses países inclui em seu currículo nacional.<sup>4</sup>

Para representar todo o escopo de um currículo matemático completo em um país A+ típico, aproximadamente três tópicos teriam que ser adicionados em cada série além dos listados na Figura 1. Como se nota na última linha da Figura 1, o número médio de tópicos que teriam que ser adicionados varia de um (na quarta e quinta séries) a seis (na segunda e sétima séries). Essas são informações importantes para americanos que compreendem que há uma necessidade de um núcleo curricular comum prescrito, mas que também acreditam que algum nível de discricionariedade deve ser permitido. O compósito A+ mostra que, ao menos na área da matemática, é eminentemente sensato e factível pensar em alguns tópicos matemáticos como parte de um núcleo exigido e ensinado em determinadas séries, e em outros como tópicos que podem pairar de acordo com, digamos, o discernimento estadual ou distrital.

<sup>4</sup> Para assegurar que nossa análise do compósito A+ se aplica de fato a um currículo completo, desenvolvemos um segundo compósito que incluiu todos os tópicos adicionais dos países A+. Esse compósito completo confirmou que a estrutura básica escalonada em três patamares que é discutida na seção sobre o compósito A+ é mantida mesmo após os tópicos adicionais serem adicionados.

## 3. O currículo coerente

#### O compósito A+

A Figura 1 apresenta o compósito A+ para a área de matemática, separado por tópicos e séries. Os 32 tópicos listados são aqueles que figuram nos currículos nacionais de uma dada série em ao menos dois terços dos países A+. Como evidenciado pela forma "triangular superior" dos dados, o compósito A+ reflete uma evolução a partir de uma ênfase inicial na aritmética da primeira à quarta série para álgebra mais avançada e geometria a partir da sétima e oitava séries. Quinta e sexta séries servem como um estágio de transição no qual tópicos como proporcionalidade e geometria de coordenadas são ensinados, estabelecendo uma ponte para o estudo formal de álgebra e geometria.

# Notas da Figura 1. Compósito A+

<sup>1</sup>Os tópicos desta coluna incluem o núcleo A+ apresentado na Tabela 1, assim como alguns tópicos adicionais. A análise por trás da Tabela 1 consistia em encontrar estes tópicos incluídos por 70% ou mais dos países A+ em seus padrões de conteúdo e livros didáticos, e não tentou especificar um currículo completo de oitava série. Os dados na Tabela 7 têm uma origem analítica diferente baseada em dados diferentes (GTTM), onde o objetivo é retratar um conjunto completo de tópicos de oitava série que representa um currículo composto para os países A+. A Tabela 7 representa não só os tópicos *comuns*, mas tópicos suficientes para constituir, em média, um currículo completo naquela série.

<sup>2</sup>O numerador (e.g., 2) indica que, em média, dois tópicos adicionais eram propostos para a 1ª série nos países A+ para um total de 5 (incluindo os 3 indicados na Tabela 7). O denominador (e.g., 4) indica que 4 possíveis tópicos adicionais existem, dos quais estes 2 podem ser selecionados. Entretanto, a maioria dos países A+ não escolheu nenhum destes 4 mas ficaram igualmente divididos entre as possibilidades com apenas metade deles escolhendo algum. Duas exceções são notadas: i) para a 1ª série, 3 dos 4 possíveis tópicos foram escolhidos por apenas 2 dos países, ii) para a série 4 há somente um tópico possível, mas ele foi selecionado por apenas metade dos países, i.e., por uma minoria. A Tabela 8 lista os possíveis tópicos *adicionais* necessários para completar o currículo de cada série.

Figura 1. Compósito A+
Tópicos matemáticos propostos em cada série por pelo menos dois terços dos países

Tópico	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8
Números Inteiros: Significado				•	•			
Números Inteiros: Operações	-	-		-	•			
Unidades de Medida		-		-	-	-	•	
Frações Simples						•		
Equações & Fórmulas				•	•	•		
Representação de Dados & Análise					•	•		
Geometria Plana: Introdução				•	•	•		
Geometria Plana: Polígonos & Círculos				•	•	•		
Medidas: Perímetro, Área & Volume				•	•	•	•	
Arredondamento & Dígitos Significativos				•	•			
Estimativa de Cálculos				•	•	•		
Números Inteiros: Propriedades das Operações					•			
Estimativa de Quantidade & Tamanho								
Frações Decimais				•		•		
Relação entre Frações Comuns & Decimais				•		•		
Propriedades de Frações Comuns & Decimais					•	•		
Percentagens					•	•		
Conceitos de Proporcionalidade					•	•	•	
Problemas de Proporcionalidade					•	•	-	
Geometria Plana: Geometria de Coordenadas							•	•
Geometria: Transformações						•	•	•
Números Negativos, Inteiros & Suas Propriedades							•	
Teoria dos Números							•	
Expoentes, Raízes & Radicais							•	•
Expoentes & Ordens de Magnitude								
Medidas: Estimativas & Erros¹								
Construções Usando Régua & Compasso								
Geometria Tridimensional							•	
Geometria: Congruência & Similaridade								
Números Racionais & Suas Propriedades								
Padrões, Relações & Funções								
Proporcionalidade: Derivada & Trigonometria								
Número de tópicos propostos por ao menos 2/3 dos países A+.	3	3	7	15	20	17	16	18
Número de tópicos adicionais propostos, em média, por países A+ para completar seus currículos em cada série. <sup>2</sup>	2/4	6/7	5/8	1/1	1/2	3/5	6/10	3/7

Proposto por 4 de 6 países de melhor desempenho.	
Proposto por todos os países A+, exceto um (5 de 6).	•
Proposto por todos os países A+.	-

Mais especificamente, esses dados sugerem um padrão escalonado de três patamares de complexidade matemática crescente. O primeiro patamar possui uma ênfase fundamentalmente em aritmética, incluindo frações comuns e decimais, arredondamento e estimação. Os tópicos deste patamar geralmente são cobertos da primeira à quarta série. O terceiro patamar, coberto na sétima e oitava séries, consiste principalmente em tópicos avançados em números, tais como teoria dos números (incluindo números primos e fatoração, expoentes, raízes, radicais, ordens de magnitude e números racionais e suas propriedades), álgebra (incluindo funções e derivada), e geometria (incluindo congruência e similaridade e geometria tridimensional). A quinta e sexta séries parecem servir como uma camada sobreposta de transição, com atenção continuada para alguns tópicos de aritmética, mas também com uma introdução a tópicos mais avançados, como percentagens; números negativos, inteiros e suas propriedades; problemas e conceitos de proporcionalidade; geometria de coordenadas bidimensional; e transformações geométricas.

A estrutura curricular também inclui um pequeno número de tópicos que proporcionam uma espécie de continuidade através de todos os três patamares. Esses tópicos continuados (tais como unidades de medida, que são cobertas da primeira à sétima série, e equações e fórmulas, que são cobertas da terceira à oitava série) parecem sustentar a estrutura curricular geral. Esses tópicos possuem uma amplitude implícita que significa que eles poderiam passar de seus aspectos mais elementares para o início de uma matemática mais complexa durante as séries iniciais e as séries finais do ensino fundamental (sexta, sétima e oitava séries, no caso dos Estados Unidos).

Outro padrão identificado na Figura 1 diz respeito ao número de séries nas quais um tópico é coberto no compósito A+ (tópicos matemáticos nesses países são geralmente estabelecidos para um período médio de três anos). Somente oito dos 32 tópicos são cobertos por cinco anos ou mais. Além disso, nas séries compreendidas entre a primeira e a oitava, cinco dos 32 tópicos são cobertos em apenas um ano. (Esses cinco tópicos reaparecem nos currículos de matemática de ensino médio dos países A+, mas a Figura 1 não inclui esta informação). Como se observará, a curta duração da cobertura dos tópicos nesses países se encontra em grande contraste com o caso dos Estados Unidos.

Esses dados indicam que entre os países A+ há, em comum, um conjunto de tópicos matemáticos — aqueles relacionados a números inteiros e medidas — que servem como uma base para a compreensão matemática. Eles constituem o conhecimento matemático fundamental que os alunos devem dominar entre a primeira e quinta séries. O aprendizado matemático futuro se constrói sobre essa base. Nas séries intermediárias e superiores, tópicos novos e mais sofisticados são acrescentados — e, de maneira expressiva, os tópicos de base então desaparecem do currículo.

#### Uma estrutura que reflete a disciplina da matemática

Até o presente momento, a maioria das discussões e avaliações a respeito da qualidade dos currículos americanos tem girado em torno de características tais como clareza, especificidade, e, comumente, uma ideologia particular. Por exemplo, na matemática, essas distinções foram reveladas a partir das chamadas "guerras matemáticas", um debate sobre o que constitui a matemática básica para o currículo escolar.

Observando o compósito A+, nossa definição de qualidade é levada para além dessas questões, para o que acreditamos ser uma característica mais profunda e fundamental. Consideramos que uma das características mais importantes que define a qualidade dos padrões de conteúdo é o que denominamos coerência.

Definimos que padrões de conteúdo e currículo são considerados coerentes se estes são articulados através do tempo como uma sequência de tópicos e execuções que sejam lógicos e reflitam, onde apropriado, a natureza sequencial e hierárquica do conteúdo disciplinar a partir do qual o tema em questão deriva. Isto é, o que e como se ensina aos alunos deve refletir não somente os tópicos que se encaixam em uma determinada disciplina acadêmica, mas também as ideias-chave que determinam como o conhecimento é organizado e gerado dentro daquela disciplina.

Isso implica que, "para ser coerente", um conjunto de padrões de conteúdo deve evoluir a partir de elementos pontuais (e.g., o significado e as operações com números inteiros, incluindo fatos matemáticos simples e procedimentos de cálculo rotineiros associados a números inteiros e frações) para estruturas mais complexas inerentes à disciplina. Essa estrutura mais complexa passa

então a servir como um meio de conectar os elementos (como a compreensão do sistema de números racionais e suas propriedades). A evolução de elementos pontuais para estruturas mais complexas deve ocorrer ao longo do ano escolar em uma determinada série e ao longo do avanço do aluno através das sucessivas séries.

Com base nessa definição de coerência, o compósito A+ é muito forte e parece apto a permitir a compreensão dos alunos a respeito dos grandes conceitos e dos elementos pontuais da matemática, e assegurar que todos os alunos sejam expostos a um conteúdo matemático substancial.

Em suma, a estrutura "triangular superior" dos dados da Figura 1 implica que alguns tópicos foram projetados para proporcionar uma base para a compreensão matemática e, de acordo com isto, foram cobertos nas séries iniciais. De forma crescente ao longo das séries, os currículos dos países de melhor desempenho se tornam mais sofisticados e rigorosos em relação aos tópicos matemáticos que são cobertos. Como resultado, isso reflete uma lógica que poderíamos argumentar ser inerente à matemática propriamente dita. Como veremos mais adiante, os padrões estaduais e distritais nos Estados Unidos não refletem uma estrutura lógica comparável entre si.

O compósito A+ é incrivelmente coerente, e é um exemplo de referência que pode guiar os esforços de elaboração de currículos e padrões. Mas o enorme impacto educacional dos currículos nos países A+ está relacionado também a diversos fatores adicionais: Em todo país A+ existe um currículo nacional único. Este currículo não fica esquecido em uma prateleira sem ser lido ou usado, nem é um documento excessivamente longo que professores analisam solitariamente, selecionando que tópicos devem ser mais ou menos enfatizados. O currículo nacional é feito para ser o currículo posto em prática; o treinamento, as ferramentas e avaliações correspondentes são fornecidos, de forma a tornar possível (e provável) tal "colocação em prática". A coerência do currículo é traduzida na forma de livros didáticos, livros de exercício, testes de diagnóstico para uso dos

<sup>5</sup> A Bélgica possui, na verdade, dois currículos nacionais, um para cada um de seus grupos linguísticos. Para todos os efeitos práticos, entretanto, um dado grupo de professores e alunos é dirigido apenas por um, de forma que tudo funciona como se houvesse um currículo nacional único.

professores, e outros materiais de sala de aula que permitem que os professores levem o currículo à sala de aula de uma maneira eficiente e relativamente consistente. Por sua vez, o currículo serve como uma importante base para o treinamento pedagógico dos professores do país e para um desenvolvimento profissional contínuo, o que novamente acrescenta à qualidade alta e geralmente consistente do ensino nas salas de aula e escolas.

Por trás de tudo isso e tornando isso possível, está o fato de que o currículo é comum — isto é, o mesmo conjunto coerente de tópicos se destina a ser ensinado na mesma série para praticamente todas as crianças no país —, pelo menos da primeira à oitava séries (que são o foco de nosso estudo). Independentemente de qual escola o aluno frequenta ou aos cuidados de que professor ele é colocado, o sistema é projetado de forma que ele seja exposto ao mesmo material na mesma série.

Esse currículo comum e coerente torna possível uma série de benefícios para a educação dos alunos. Os possíveis efeitos líquidos desses benefícios são: 1) influenciar positivamente o desempenho global dos alunos (conforme relatado na primeira seção deste capítulo); 2) reduzir significativamente os efeitos de desempenho desigual que são produzidos (nos Estados Unidos) devido à existência de padrões e currículos de qualidade variável; e, como resultado, 3) enfraquecer substancialmente a correlação entre desempenho escolar e posição socioeconômica (uma ligação que é bastante forte nos Estados Unidos).

# 4. Repetição e incoerência nos Estados Unidos

Como sabemos, ao contrário dos países A+, os Estados Unidos nunca possuíram um currículo nacional único. Para determinar o currículo matemático proposto, observamos principalmente os currículos de matemática estabelecidos em nível estadual. Também revisamos currículos distritais.

#### Programas de ensino estaduais

Na Figura 2 é apresentado um compósito de programas de ensino matemáticos de 21 estados que participaram voluntariamente de nosso estudo. Como a Figura 1 inclui tópicos que eram propostos por ao menos dois terços dos países A+, um grupo majoritário similar, de dois terços, foi utilizado para criar o compósito mostrado na Figura 2.º O padrão resultante da análise do compósito dos estados americanos é muito diferente do padrão dos países A+. Os currículos estaduais não refletem a estrutura escalonada descrita anteriormente. A maioria dos 32 tópicos matemáticos ensinados nos países A+ em algum momento entre a primeira e oitava séries são provavelmente ensinados aos alunos americanos repetidamente ao longo do ensino elementar (fundamental) e da *middle school* (6ª, 7ª, 8ª séries).<sup>7</sup> Na verdade, a duração média de um tópico de acordo com os currículos estaduais é de quase seis anos. Essa duração é duas vezes maior do que a observada nos países A+.

<sup>6</sup> Uma nota metodológica: a maioria dos estados possuía normas de conteúdo específicas para cada série. Mas diversos estados especificam um agrupamento de séries nas quais um tópico poderia ser ensinado, e então deixam a cargo dos distritos locais determinar em que séries o tópico é ensinado de fato. Para os poucos estados que utilizaram a abordagem de agrupamento, nosso método assume que o tópico é pretendido para cada uma das séries do agrupamento. Isso parece razoável, já que alguns dados indicam que distritos e editores de livro-texto tendem a usar agrupamentos desta forma.

<sup>7</sup> Isto continua sendo verdade para cada um dos estados estudados — não somente para o compósito. Quando fizemos apresentações individuais das normas de cada estado, descobrimos que a maior parte era ainda mais repetitiva do que o compósito. Além disso, nenhum dos currículos estaduais era, nem remotamente, tão coerentes quanto os do compósito A+.

Figura 2. Compósito de 21 Estados Tópicos matemáticos propostos em cada série por pelo menos dois terços (67%) dos estados

То́рісо	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8
Números Inteiros: Significado					•			
Números Inteiros: Operações					•			
Unidades de Medida	•			•				•
Frações Comuns		•	•	•		•		
Equações & Fórmulas			•	•	•			
Representação de Dados & Análise								•
Geometria Plana: Introdução	•	•	•	•	•	•	•	•
Geometria Plana: Polígonos & Círculos								•
Medidas: Perímetro, Área & Volume					•			•
Arredondamento & Dígitos Significativos								
Estimativa de Cálculos			•	•	•	•	•	•
Números Inteiros : Propriedades das Operações								
Estimativa de Quantidade & Tamanho								
Frações Decimais				•	•	•		
Relação entre Frações Comuns & Decimais								
Propriedades de Frações Comuns & Decimais								
Percentagens						•	•	
Conceitos de Proporcionalidade						•		
Problemas de Proporcionalidade						•	•	•
Geometria Plana: Geometria de Coordenadas				•				•
Geometria: Transformações	•	•	•	•	•	•	•	•
Números Negativos, Inteiros & Suas Propriedades							•	
					•			
Expoentes, Raízes & Radicais								-
Expoentes & Ordens de Magnitude								
Medida: Estimativa & Erros			•		•	•	•	
Construções Usando Régua & Compasso								
Geometria Tridimensional				•		•		•
Geometria: Congruência & Similaridade						•	•	
Números Racionais & Suas Propriedades						•	•	
Padrões, Relações & Funções	•				•			-
Derivada & Trigonometria								
Número de tópicos propostos por ao menos 2/3 dos 21 estados.	14	15	18	18	20	25	23	22
Número de tópicos adicionais propostos pelos estados para completar um currículo típico para cada série.	8	8	7	8	8	5	6	6

Proposto por pelo menos 67% dos 21 estados	
Proposto por pelo menos 83% dos 21 estados	•
Proposto por todos (100%) os 21 estados	

Essa duração longa significa que os estados americanos incluem muito mais tópicos a cada série do que os países A+. Isso, por sua vez, significa que cada tópico é tratado em menor profundidade. Em geral, os currículos estaduais aumentam a duração de um tópico típico ao introduzi-lo em uma série inicial. Por exemplo, mesmo tópicos que exigem mais do aluno tais como transformações geométricas, erros de medição, geometria tridimensional e funções são introduzidos já na primeira série. No compósito A+, esses mesmos tópicos são cobertos pela primeira vez na *middle school* (séries finais do ensino fundamental). Se coerência significa que a estrutura interna da disciplina acadêmica se reflete tanto dentro das séries quanto através das sucessivas séries, então fica claro que nos Estados Unidos há uma falta de coerência, mesmo que a alegação seja que esses tópicos sejam apresentados inicialmente apenas de uma forma elementar e introdutória. Os padrões curriculares dos Estados Unidos, ao introduzir muitos tópicos e muito cedo, com frequente repetição de tópicos em anos posteriores, parecem ser somente uma coleção arbitrária de tópicos. Eis alguns exemplos dessa incoerência:

- Conhecimento de pré-requisitos não é prioridade. Por exemplo, o ensino das propriedades de operações com números inteiros (como a propriedade distributiva) é planejado para a primeira série, quando as crianças ainda estão começando a estudar operações básicas com números inteiros. Nos países de melhor desempenho esse tópico normalmente é introduzido inicialmente na quarta série (e não antes da terceira série).
- Os tópicos se prolongam interminavelmente. O compósito A+
  não propõe que nenhum tópico seja coberto em todas as oito
  séries, embora 10 tópicos tenham sido planejados para uma
  cobertura tão prolongada no compósito estadual americano.
- Falta consenso quanto ao momento apropriado de ensinar os tópicos. O compósito estadual tem linhas vazias para três tópicos fundamentais — arredondamento e dígitos significativos, propriedades de frações comuns e decimais e derivada. Essa descoberta estranha reflete a falta de consenso entre os estados em relação à escolha da série adequada para tais tópicos. Todos os currículos estaduais cobrem arredondamento e dígitos significativos, assim como frações comuns e decimais, mas estes

tópicos não podem ser parte de um compósito estadual porque ao menos dois terços dos estados não estão de acordo quanto à escolha das séries apropriadas para eles. A ausência do estudo da derivada no compósito estadual reflete tanto uma falta de concordância quanto uma falta de rigor — a maioria dos estados não planeja que este tópico seja coberto até o ensino médio (*high school*).

A cobertura mais prolongada de tópicos combinada à ausência da estrutura de três patamares sugere que os currículos estaduais são desenvolvidos com uma abordagem de "lista de supermercado" da matemática, desprovida de qualquer sensibilidade quanto à lógica interna da matemática enquanto disciplina. Para muitos dos estados, considerados individualmente, parece que o ensino de quase todos os tópicos é planejado para todos os alunos em todas as séries.

#### Programas de ensino distritais

Pode-se argumentar que os professores prestam mais atenção a currículos distritais do que a currículos estaduais. Eles são substancialmente diferentes? Parece que não. Fizemos dezenas de análises de currículos distritais em todas as regiões dos Estados Unidos. Neste capítulo, apresentamos um compósito de currículos distritais para um estado selecionado.8 Ao se observar este compósito (ver Figura 3, p.39), fica claro que os currículos distritais tendem a incluir um número ligeiramente menor de tópicos do que o especificado nos currículos estaduais. Porém, como nos estados, os distritos ainda especificam muito mais tópicos por série do que os países A+. Além disso, os dados distritais, assim como os estaduais, indicam um considerável nível de repetição de tópicos ao longo das séries. Cinco dos 10 tópicos com cobertura planejada em todas as oito séries no compósito estadual são similarmente planejados no compósito distrital; três tópicos adicionais são planejados para sete das oito séries. De forma geral, portanto, podemos perceber que os currículos distritais são praticamente tão incoerentes quanto aos currículos estaduais.

<sup>8</sup> Esse estado participou voluntariamente da análise distrital, entretanto, os resultados apresentados aquisão consistentes comos resultados de nossos outros estudos distritais.

Pode-se presumir que, dado o amplo escopo desses padrões, os professores são forçados a suprimir parte do que é planejado nos currículos estaduais e distritais. Não é provável que muitos consigam ensinar um currículo coerente a partir da incoerência que lhes é oferecida. Ademais, é provável que os professores suprimam partes das indicações dos currículos estaduais/locais de formas diferentes e idiossincráticas. Isso é o que leva ao conhecido fenômeno americano — o que causa sofrimento particular para alunos que estão de passagem — , no qual aquilo que é de fato ensinado em uma dada série varia imensamente de uma sala de aula para outra, até mesmo na mesma escola, distrito ou estado.

Nem é preciso dizer que, nessas circunstâncias, um investimento sério em desenvolvimento profissional dos professores baseado no currículo não é viável; nem é realmente viável alinhar um programa de treinamento pedagógico ou textos a um currículo não-existente. Qualquer avaliação ou estudo no âmbito estadual deve escolher entre fazer perguntas vagas ou básicas — ou arriscar fazer perguntas específicas sobre conteúdos particulares que não foram ensinados pelos professores.

Figura 3. Compósito de 50 Distritos em um Estado Tópicos matemáticos propostos em cada série por pelo menos dois terços (67%) dos distritos

Tópico	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8
Números Inteiros: Significado	•	•	•	•	•			
Números Inteiros: Operações	•	•	•	•	•	•		
Unidades de Medida			•	•	•	•	•	•
Frações Comuns		•	•	•	•	•	•	
Equações & Fórmulas		•		•	•	•	•	•
Representação de Dados & Análise	•	•	•	•	•	•	•	•
Geometria Plana: Introdução			•			•	•	•
Polígonos & Círculos	•	•	•	•	•	•	•	•
Perímetro, Área & Volume			•	•	•	•	•	•
Arredondamento & Dígitos Significativos								
Estimativa de Cálculos				•				
Números Inteiros: Propriedades das Operações								
Estimativa de Quantidade & Tamanho								
Frações Decimais					•	•	•	•
Relação entre Frações Comuns & Decimais								
Propriedades de Frações Comuns & Decimais								
Percentagens						•	•	•
Conceitos de Proporcionalidade								
Problemas de Proporcionalidade								•
Geometria Plana: Geometria de Coordenadas								
Geometria: Transformações								
Números Negativos, Inteiros & Suas Propriedades								
Teoria dos Números								
Expoentes, Raízes & Radicais								
Expoentes & Ordens de Magnitude							•	
Medida: Estimativa & Erros								
Construções Usando Régua & Compasso								
Geometria Tridimensional	•	•	•	•	•	•	•	•
Congruência & Similaridade								
Números Racionais & Suas Propriedades								•
Padrões, Relações & Funções	•	•	•	•	•	•	•	•
Derivada & Trigonometria								
Número de tópicos propostos por 2/3 (67%) dos distritos.	8	13	16	15	16	18	27	25
Número de tópicos adicionais propostos pelos distritos para completar um currículo típico para cada série.	9	6	4	7	8	9	3	4

Proposto por pelo menos 67% dos distritos.	
Proposto por pelo menos 83% dos distritos.	•
Proposto por todos os distritos.	-

De forma geral, as Figuras 2 e 3 (p.35 e p.39), que representam um compósito de padrões estaduais e distritais, sugerem que os Estados Unidos tratam a matemática como uma coleção arbitrária de tópicos. Não existe uma elaboração de sentido ou estrutura. A matemática — tanto para alunos quanto para professores — aparenta ser e é sentida como um punhado de tópicos desconexos ao invés de um desenvolvimento contínuo dos conceitos principais que se encaixam de uma maneira estruturada e disciplinada.

Para completar esse cenário do currículo de matemática proposto nos Estados Unidos, devemos destacar a enorme variação curricular que aparece na oitava série, quando a maioria das escolas oferece uma variedade de cursos de matemática, cada um com conteúdo e rigor diferentes. Em nosso estudo sobre os cursos de matemática oferecidos para a oitava série nas escolas americanas, descobrimos que alunos da oitava série estão matriculados em um dos cerca de seis diferentes tipos de curso de matemática, que variam de matemática remedial com foco em aritmética, até pré-álgebra, álgebra e até mesmo geometria (Cogan et al, 2001). Não é surpreendente, portanto, que o desempenho escolar ao fim da oitava série correspondesse grosseiramente aos cursos que o aluno havia feito. Em resumo, o desempenho de um aluno correspondia substancialmente à sua oportunidade de se expor a conteúdos mais ou menos rigorosos.

Provavelmente também não é surpresa a conclusão de outro estudo: a oportunidade que um aluno tem de estudar matemática em um curso de nível mais alto estava relacionada à sua localização geográfica. Determinamos que, enquanto 80% dos alunos de oitava série tinham acesso a um curso de matemática "regular", apenas 66,5% deles frequentavam escolas que sequer ofereciam um curso de álgebra. Isto é, um terço dos alunos de oitava série não tem sequer a opção de tal curso. Em áreas rurais e urbanas, 60% dos alunos frequentavam escolas que ofereciam cursos de álgebra e outros temas mais desafiadores. Em cidades suburbanas e de tamanho médio, 80% dos alunos frequentavam escolas com tais cursos.

Assim como no caso das ideias sobre o cultivo agrícola disponíveis nos estados e cidades do país B, o fato de que os padrões estaduais e distritais são tão difíceis de se implementar de forma consistente não é uma grande perda, dado que eles possuem qualidade questionável. Assim como os agricultores no país B, os professores nos Estados Unidos frequentemente não possuem as ferramentas (livros didáticos ou materiais de sala de aula) ou o treinamento para fazer uso do conhecimento que potencialmente poderiam extrair dos padrões, de qualquer forma. Mas sem o benefício do conhecimento acumulado nacional sobre educação matemática, e sem as ferramentas e o treinamento associados a ela, os professores nos Estados Unidos estão em grande desvantagem. Alguns deles encontram currículos excelentes; alguns têm uma aptidão — combinada com muito trabalho árduo — para deduzir como ensinar razoavelmente bem, mesmo os alunos com mais dificuldades. Os distritos escolares mais eficientes e ricos podem atrair uma porção desproporcional dos professores mais preparados; além disso, muitos destes distritos fornecem material e treinamento razoáveis para seu corpo docente.

Ainda assim, a maioria dos professores, especialmente aqueles que trabalham nos distritos e escolas mais pobres, não podem contar com muita ajuda por parte de seus distritos ou estados. Para a maior parte dos professores, é um desafio contínuo e desgastante delinear um currículo básico e os planos de lições diárias para executá-lo. Não são muitos os professores que possuem tempo extra ou os recursos para ir além e imaginar formas únicas e especiais de engajar os alunos de sua classe (ou, no ensino médio, de várias classes) que estão ficando para trás por uma variedade de motivos.

Essa falta de currículo, materiais e treinamento produz os mesmos efeitos para os alunos dos Estados Unidos que as políticas de cultivo do país B produzem para seus agricultores. O currículo realmente importa. As escolas deveriam proporcionar oportunidades para os alunos adquirirem o conhecimento que a sociedade julga importante, e estruturar tais oportunidades de aprendizado é essencial, se houver a ambição de cobrir de maneira eficaz todo o material necessário. Os tópicos específicos que são apresentados em cada série, a sequência na qual esses tópicos são apresentados, e a profundidade que os professores atingem são todas decisões críticas em torno do currículo, que têm implicações importantes em relação ao que as crianças aprendem.

#### 5. O resultado nos Estados Unidos: desempenho mais baixo e maior desigualdade

Com base em nossas descobertas a respeito das diferenças curriculares entre os países A+ e os Estados Unidos, podemos dizer que alunos e professores são severamente prejudicados — tanto pela inadequação do currículo no país quanto pela perda dos benefícios que poderiam advir da elaboração de um currículo comum de qualidade.

Vimos no início deste capítulo que o desempenho médio nos Estados Unidos é baixo em comparação com diversos outros países. Ademais, a lacuna entre os desempenhos dos alunos das escolas mais e menos privilegiadas é muito maior do que a lacuna correspondente na maioria dos países contemplados no TIMSS. Na verdade, um estudo recente conduzido por pesquisadores do Boston College demonstrou que, nos Estados Unidos, cerca de 40% das variações de pontuação dos alunos em testes entre as escolas podem ser explicadas por fatores socioeconômicos. Em comparação, entre todos os países do TIMSS, fatores socioeconômicos explicam menos de 20% desse tipo de variação (Martin *et al*, 2000).

Acreditamos que o baixo desempenho médio dos Estados Unidos, assim como a forte ligação entre desempenho e posição socioeconômica, pode ser atribuído em parte à falta de um currículo comum e coerente. Os países A+ possuem um currículo comum para praticamente todos os alunos até a oitava série. Nesses países, todas as escolas têm acesso mais ou menos comparável a uma gama completa de materiais e ao desenvolvimento profissional, que podem ajudar os professores a impulsionar o desempenho dos alunos.

Ademais, as oportunidades que os alunos têm de aprender são reforçadas pelos benefícios que acompanham um currículo comum: os professores podem trabalhar em conjunto, com uma linguagem e objetivos compartilhados; novos professores podem receber orientações claras sobre o conteúdo a ser ensinado; o desenvolvimento profissional pode ser ancorado no currículo que os professores ensinam; livros didáticos podem se tornar mais focados e tratar com mais profundidade um conjunto menor de tópicos; e alunos (e professores) transitórios podem se adaptar mais facilmente a novas escolas. Tudo isso contribui para uma maior consistência e

qualidade entre as escolas.

Temos a intenção de conduzir estudos adicionais para testar com maior profundidade a veracidade dessas hipóteses. Mas poderíamos dizer que o peso das evidências — e o peso do que está em jogo, a saber, a redução das lacunas de desempenho e o aumento do desempenho médio — não nos faz querer esperar por mais evidências antes de agir.

Como mencionamos no início, raramente as práticas de outros países podem ser simplesmente importadas. As instituições e culturas são muito diferentes entre si. Entretanto, podemos aprender com outros países e encontrar meios de adaptar aquelas práticas que parecem particularmente eficientes para nosso próprio uso. Mas benefícios similares podem advir de arranjos adaptativos que levem a um currículo comum, coerente e rigoroso para grandes grupos de alunos de um país, tais como adotar o currículo em nível local, ou adotar um currículo para um conjunto de regiões.

#### Referências

- Cogan, L.S., Schmidt, W.H., and Wiley, D.E. (2001). Who Takes What Math in Which Track? Using TIMSS to Characterize U.S. Students' Eighth-Grade Mathematics Learning Opportunities. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 23(4) 323-341.
- Martin, M.O., Mullis, I., Gregory, K.D., Hoyle, C., and Shen, C. (2000). Effective schools in science and mathematics, IEA's Third International Mathematics and Science Study. Chestnut Hill, MA: International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.
- Schmidt, W., Houang, R., & Cogan, L. (2002). A coherent curriculum: The case of mathematics. *American Educator*, 26(2), 1–18.
- Schmidt, W. H., Houang, R., & Shankrani, S. (2009). International lessons about national standards. Washington, DC: Thomas B. Fordham Institute.
- Schmidt, W.H., McKnight, C.C., Houang, R.T., Wang, H., Wiley, D.E., Cogan, L.S., and Wolfe, R.G. (2001). Why Schools Matter: A Cross-National Comparison of Curriculum and Learning. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Schmidt, W.H., Wang, H.A., and McKnight, C.C. (2005). Curriculum Coherence: An Examination of U.S. Mathematics and Science Content Standards from an International Perspective. *Journal of Curriculum Studies* 37 (5) 525-559.
- Valverde, G.A. & Schmidt, W.H. (2000). Greater expectations: learning from other nations in the quest for 'world-class standards' in U.S. school mathematics and science. *Journal of Curriculum Studies*, 32(5), 651-687.



# "É verdade que algumas pessoas simplesmente não conseguem aprender matemática?"

#### Daniel T. Willingham

"Eu não sou bom em matemática" é algo dito com tanta frequência— e com tão pouco constrangimento (ao menos nos Estados Unidos) —, que parece que nossa sociedade aceitou o "fato" de que a matemática não é para a maioria de nós. O problema é que esta noção é um mito. Praticamente qualquer pessoa é plenamente capaz de adquirir a "numeracia", ou seja, o domínio das noções básicas de matemática, assim como as habilidades necessárias para o exercício pleno da cidadania: uma compreensão de procedimentos aritméticos, de álgebra, geometria e probabilidade suficientemente profunda para permitir a sua aplicação em problemas da vida cotidiana.

#### O que a natureza oferece?

Os seres humanos possuem uma clara predisposição para o aprendizado de determinados tipos de informação. O mais notável exemplo é o da linguagem; quando exposta a estímulos linguísticos normais, praticamente qualquer criança é capaz de aprender sua língua nativa sem esforço ou instrução explícita. De fato, parecemos possuir algum conhecimento inato das estruturas gramaticais; nossas mentes

<sup>1</sup> *Numeracy* no original, o que remete ao conceito de *literacy*, isto é, a alfabetização e o domínio da linguagem escrita. (N. do T.)

são tão predispostas a aprender a linguagem que *aperfeiçoamos* inputs linguísticos imperfeitos. Crianças surdas expostas somente aos sinais mais rudimentares de linguagem foram observadas modificando aquilo que observaram para lhe atribuir *mais* estrutura linguística (Senghas, Kita e Özyürek, 2004). Será que isso também se aplica à matemática? Quão "naturalmente", afinal, as crianças aprendem matemática? Duas descobertas importantes realizadas nos últimos vinte anos são relevantes: (1) humanos nascem com a habilidade de lidar com números, e (2) humanos parecem nascer com uma percepção de que números e espaço estão relacionados. Vamos discutir brevemente cada uma delas.

Primeiramente, os seres humanos nascem dotados de duas formas de lidar com números. Uma é um senso numérico aproximativo. Este senso não é capaz de permitir uma enumeração precisa, mas nos permite comparar dois conjuntos de objetos e saber imediatamente qual deles é o maior. Por exemplo, se você visse 50 grãos de feijão espalhados em uma mesa e 100 grãos em outra mesa, saberia rapidamente, sem contá-los, qual mesa possui mais grãos. Testes de laboratório conduzidos cuidadosamente confirmam que usamos este senso natural de "numerosidade" para realizar tais julgamentos; não o fazemos a partir da avaliação da área tomada, densidade dos grãos ou de qualquer outra pista (Oeffelen e Vos, 1982; Temple e Posner, 1998).

Embora crianças pequenas não possam dar respostas verbais, sabemos que elas também são capazes de fazer esse tipo de julgamento. Essas crianças olham para objetos antes desconhecidos até ficarem cansadas deles. Se um objeto diferente lhes é apresentado, elas olharão para ele; mas se o mesmo objeto for novamente mostrado, elas o observarão por um tempo consideravelmente menor. A partir da medição desse tempo de observação, um experimento pode determinar se a criança percebe uma diferença entre o primeiro e o segundo objeto. Utilizando essa metodologia, vários estudos determinaram que crianças pequenas possuem esse senso aproximativo de números (Brannon, 2002; Xu e Spelke, 2000), ainda que não seja tão refinado quanto em outras crianças ou em adultos. Bebês de seis meses podem perceber diferenças em "numerosidade" numa razão de 2:1 ou maior, ao passo que adultos as percebem numa razão de 8:7. Há também sólida evidência de sistemas similares em primatas (Brannon e Terrace, 1998) e ratos (Meck e Chuck, 1983).

A outra forma de percepção de números com a qual os humanos nascem é a capacidade de representar valores precisos, mas somente até o valor de três. Por exemplo, se bebês de 10 meses observam uma bolacha sendo colocada no interior de um pote e depois duas bolachas sendo colocadas em outro pote, eles engatinharão em direção ao pote com duas bolachas. Eles também escolheriam três bolachas em vez de duas, mas falham ao comparar duas com quatro (Feigenson, Carey e Hauser, 2002). Um experimento análogo testando macacos Rhesus não treinados mostrou um desempenho similar; na verdade, eles se saíram ligeiramente melhor que bebês humanos, com uma habilidade de representar quantidades até quatro (Hauser, Carey e Hauser, 2000). Adultos podem perceber "numerosidades" de até quatro mais ou menos instantaneamente e praticamente sem erros. Erros e tempos de resposta aumentam drasticamente à medida que o número de objetos aumenta para além de quatro (Trick e Pylyshyn, 1994).

A outra descoberta importante dos últimos vinte anos de pesquisa é que humanos aparentemente nascem com a noção de que números e espaço estão relacionados. Existe uma variedade de evidências da percepção dessa relação. Primeiramente, em muitas culturas se faz uso de uma representação espacial dos números, através de uma reta numérica, por exemplo. Em segundo lugar, números e espaço são representados em áreas sobrepostas do cérebro. Danos em uma região particular do cérebro (o sulco intraparietal, localizado na parte superior e posterior do cérebro) leva a problemas na capacidade de direcionamento espacial e também a deficiências no processamento de números (Benton, 1992). Em uma das demonstrações mais interessantes da sobreposição das áreas cerebrais associadas à matemática e à espacialidade, um grupo de pesquisadores (Knops et al., 2009) escreveu um programa de computador que analisava imagens do cérebro para classificar se os indivíduos em questão estavam mexendo os olhos para a direita ou para a esquerda durante o exame cerebral. Os pesquisadores aplicaram então o programa de classificação em dados cerebrais provenientes de dois tipos completamente diferentes de tarefa: os sujeitos do experimento fazendo operações de adição ou subtração. A teoria era que, dada a relação entre números e espaço, a subtração estaria associada ao deslocamento dos olhos para a esquerda, pois diminui o tamanho do número; e a adição com o deslocamento dos olhos para a direita, pois aumenta o tamanho do número. De forma surpreendente, o programa de computador (criado unicamente a partir

dos dados relativos aos movimentos oculares) teve um índice de acerto de 70% ao ser utilizado para prever se os indivíduos estavam somando ou subtraindo números.

Ainda assim, a forma como expressamos nosso senso inato de que números e espaço estão relacionados é claramente afetada pela cultura, como revelado no experimento a seguir. Indivíduos são colocados sentados em frente a uma tela de computador e possuem dois botões. Em cada experimento, um dígito aparece na tela e os indivíduos são instruídos a apertar o botão da esquerda se o dígito for par e o da direita se for ímpar. Quando um dígito par aparece, os indivíduos são mais rápidos em apertar o botão da esquerda para números pequenos (2 ou 4) do que números maiores (6 ou 8). Quando um dígito ímpar aparece, eles são mais rápidos em apertar o botão da direita para números maiores (7 ou 9) do que menores (1 ou 3). Em outras palavras, números pequenos "pertencem" ao lado esquerdo, e números grandes "pertencem" ao lado direito. Este efeito replicado em ampla escala não é observado em crianças até os 9 anos de idade (Berch, Folley, Hill e Ryan, 1999) e é revertido em adultos iranianos que leem da direita para a esquerda (Dehaene, Bossini e Giraux, 1993).<sup>12</sup> Assim, parece bastante provável que, mesmo que seja natural associar espaço com números, a maneira como isso acontece depende de aprendizado, e, ademais, é específica à convenção cultural.

A habilidade de enumerar com precisão *além* de aproximadamente quatro depende de outro sistema - específico a cada cultura - que é aprendido e sustentado pela linguagem. Em suma, nós aprendemos a contar. Uma das fontes mais substantivas de evidência para ajudar pesquisadores a entender o processo de contar como um sistema específico a cada cultura vem de testes realizados com os mundurucus, um grupo indígena da Amazônia. Sua linguagem possui palavras apenas para números até cinco. Acima de cinco, eles se referem simplesmente a "muitos". Eles podem utilizar o sistema numérico aproximado que nos é inato para realizar operações de adição, mas não conseguem fazer operações aritméticas precisas com números maiores que cinco (Pica *et al.*).

Os mundurucus possuem um senso numérico relacionado ao espaço, mas esta correspondência é não-linear. Isto é, diferente de uma régua ou reta numérica, cada aumento de um número não corresponde

a um aumento espacial uniforme. Se forem orientados a apontar em uma reta o local onde pontos de 1 a 10 devem ser representados, os mundurucus colocarão quantidades de 1 a 5 de forma relativamente espalhada, e quantidades de 6 a 10 mais próximas umas das outras: a diferença entre 2 e 3 é maior do que a diferença entre 7 e 8.² Adultos americanos, em contraste, possuem um senso numérico-espacial linear: eles espaçam quantidades de 1 a 10 uniformemente, como em uma reta numérica. Porém, o senso linear observado em adultos americanos se limita a situações em que eles podem contar. Ao serem instruídos para fazer a mesma tarefa com pontos entre 10 e 100, participantes americanos e da tribo dos mundurucus a executam de forma comparável. Ambos alocam mais espaço na reta para quantidades menores e menos espaço para quantidades maiores, com maior adensamento dos pontos à medida que se aproximam a 100 (Dehaene, Izard, Spelke e Pica, 2008).

Os seres humanos, portanto, parecem nascer com um senso espacial dos números, mas a configuração desse espaço não é linear. De fato, até que tenham experiência suficiente (na maioria das vezes na escola) com a correspondência linear "um-para-um" entre números e espaço que caracteriza a reta numérica, crianças americanas executam a tarefa de posicionar pontos em uma reta da mesma maneira que os mundurucus. Enquanto alunos americanos de primeira série colocam números mais altos próximos uns dos outros, alunos de terceira série os espaçam de maneira mais uniforme, e alunos de segunda série o fazem de uma forma ou de outra, dependendo do tipo específico de tarefa, dia do teste, ou outros fatores incidentais (Booth e Siegler, 2006).

Então o que "vem" naturalmente às crianças no que diz respeito à matemática? Elas possuem um senso numérico natural que lhes permite compreender e manipular quantidades muito pequenas com precisão, e quantidades bem mais altas de forma aproximada. Estas habilidades estão, obviamente, muito distantes daquelas que professores buscam desenvolver em seus alunos, porém constituem a base sobre a qual os professores devem construir o aprendizado. Assim como a capacidade de leitura não surge naturalmente, mas faz uso das representações visuais e de linguagem que são naturais (Changizi, Zhang e Shimojo, 2006), seria um palpite bastante razoável inferir que a matemática faz uso de representações mentais que são

<sup>2</sup> A relação entre números e espaço é na verdade logarítmica.

naturais, mas que não evoluíram para dar suporte à matemática da forma que nossa sociedade avançada agora necessita (Dehaene e Cohen, 2007). Para os educadores, isso significa que não devemos esperar que os alunos aprendam a matemática com facilidade. Ao invés disto, devemos esperar que a proficiência matemática requeira um cultivo cuidadoso e se desenvolva lentamente. Ao mesmo tempo, devemos ter em mente que os alunos nascem com a habilidade de aprender matemática, e não devemos deixá-los desistir ao concluir que simplesmente não são bons em matemática.

#### De que os alunos precisam para ter sucesso com a matemática?

Em relatório recente,<sup>3</sup> o *National Mathematics Advisory Panel* ("Painel Consultivo Nacional de Matemática") argumentou que o aprendizado da matemática requer três tipos de conhecimento: o factual, o procedural e o conceitual. Discutiremos a seguir cada um deles de forma detalhada.

O conhecimento factual se refere à disponibilidade na memória de respostas para um conjunto relativamente pequeno de problemas de adição, subtração, multiplicação e divisão.<sup>4</sup> As respostas devem ser bem aprendidas, de tal modo que, diante de um problema simples de aritmética (2 + 2, por exemplo), a resposta não seja calculada, mas simplesmente resgatada da memória. Ademais, o resgate da resposta deve ser automático (i.e., rápido e praticamente sem requerer atenção). Este resgate da tabuada é crítico para a resolução de problemas complexos, porque esses problemas complexos contêm problemas mais simples embutidos neles. Por exemplo, problemas longos de divisão possuem problemas mais simples de subtração embutidos. Alunos que automaticamente resgatam da memória as respostas aos problemas mais simples de subtração deixam sua memória de trabalho (i.e., o "espaço" mental onde transcorre o pensamento) livre para focar no problema maior que é a divisão longa (Lee, Lynn Ng e Fong Ng, 2009). Quanto menos memória de trabalho o aluno precisar alocar para os subproblemas de subtração, mais provável será que ele resolva o problema da divisão longa.

<sup>3</sup> Este relatório se encontra disponível na página www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf.

<sup>4</sup> As tabuadas de adição e multiplicação são mais fáceis de memorizar porque são comutativos; isto é, 3 + 4 é igual a 4 + 3 e o mesmo é verdade para 3 x 4. O mesmo não ocorre com a subtração e a divisão. Mesmo adultos com boa educação de países com excelente ensino de matemática irão algumas vezes calcular subtrações e divisões, sem recuperar o resultado da memória..

Essa interpretação da importância de se memorizar a tabuada é sustentada por diversas fontes. Primeiramente, é claro que, antes de se aprender a automatizá-los, o cálculo de fatos aritméticos básicos de fato exige uma memória de trabalho. Com prática suficiente, entretanto, as respostas podem ser extraídas da memória (em vez de calculadas), acarretando, portanto, praticamente nenhum custo à memória de trabalho (Hecht, 2002; Klapp, Boches, Trabert e Logan, 1991; Tronski, 2005). Em segundo lugar, alunos que não decoram a tabuada precisam calcular as respostas, e o cálculo é mais sujeito a erros do que o ato de resgatá-las da memória (Goldman e Pellegrino, 1987; Hasselbrings, Goin e Bransford, 1988). Em terceiro lugar, o conhecimento da tabuada está associado a uma melhor performance em tarefas matemáticas mais complexas (Kail e Hall, 1999; Swanson e Beebe-Frankenberger, 2004). Em quarto lugar, quando crianças têm dificuldades no aprendizado de aritmética, estas se devem frequentemente, em parte, a dificuldades em aprender ou resgatar da memória fatos matemáticos básicos (Andersson, 2008; Russel e Ginsburg, 1984). É de esperar que intervenções visando a melhora do resgate automático de fatos matemáticos melhorem também a proficiência na matemática mais complexa. Evidências em relação a este ponto são positivas (Royer e Tronsky, 1998; Tournaki, 2003) mas limitadas, talvez porque a automatização do conhecimento factual imponha um problema mais persistente do que as dificuldades relacionadas ao aprendizado de procedimentos matemáticos (Jordan, Hanich e Kaplan, 2003b).

E quanto aos conhecimentos procedural e conceitual, também considerados necessários pelo *National Mathematics Advisory Panel*? Um procedimento é uma sequência de passos por meio dos quais um problema encontrado com alta frequência pode ser resolvido. Por exemplo, muitas crianças aprendem uma rotina de "pegar emprestado e reagrupar" para problemas de subtração entre números de múltiplos dígitos. O conhecimento conceitual se refere a uma compreensão de significado; saber que a multiplicação de dois números negativos gera um resultado positivo e entender *por que* isto é verdade são coisas diferentes.

As "guerras sobre o ensino da matemática" que têm sido travadas entre educadores e pesquisadores da área nos Estados Unidos giraram continuamente em torno do eixo procedimentos *versus* conceitos e, como

é habitual na maioria dos debates acalorados, envolvem uma quantidade razoável de caricaturizações. Em cada extremo do debate temos progressistas, numa ponta, alegando que os tradicionalistas ficariam felizes com os alunos executando procedimentos sem entender o que estão fazendo, e, na outra, tradicionalistas alegando que aos progressistas só importa que os alunos entendam conceitos sem se preocupar com sua capacidade de resolver problemas de matemática. A maioria dos observadores das "guerras" matemáticas entende que, mesmo que algumas crianças com compreensão conceitual possam inventar procedimentos de cálculo apropriados (Hiebert e Wearne, 1996), não se pode confiar neste processo de invenção por todas as crianças (Steel e Funnell, 2001). Por outro lado, o conhecimento de procedimentos não é garantia de compreensão conceitual; por exemplo, muitas crianças são capazes de executar um procedimento de divisão de frações sem compreender por que o procedimento funciona (Hiebert e Wearne, 1996). A maioria dos observadores concorda que possuir conhecimento de procedimentos e conceitos é desejável (Baroody, Feil, Johnson, 2007; Star, 2007).

Um tanto mais controversa é a ênfase relativa que deve ser atribuída a esses dois tipos de conhecimento, e a ordem segundo a qual os alunos devem aprendê-los. Pode ser que com prática suficiente e automaticidade dos algoritmos, os alunos, com apenas um pouco de apoio, adquiram uma compreensão conceitual dos procedimentos que executam. Ou, inversamente, que, com uma sólida compreensão conceitual, os procedimentos necessários para a resolução dos problemas parecerão evidentes.

Há evidências para sustentar os dois pontos de vista. O conhecimento conceitual por vezes parece preceder o conhecimento de procedimento ou influenciar seu desenvolvimento (Byrnes, 1992; Canobi, Reeve e Pattison, 1998; Dixon e Moore, 1996; Hiebert e Waerne, 1996; Rasmussen, Ho e Bisanz, 2003). Mas também, o conhecimento de procedimento pode preceder o conhecimento conceitual. Por exemplo, crianças frequentemente conseguem contar corretamente antes mesmo de compreender todas as propriedades da contagem, como a irrelevância da ordem (Frye, Braisby, Love, Maroudas e Nicholls, 1989).

Um terceiro ponto de vista (e atualmente talvez o mais comumente aceito) considera que, para a maior parte dos tópicos, não faz sentido ensinar primeiro conceitos ou ensinar primeiro procedimentos;

ambos devem ser ensinados de forma concertada. À medida que os alunos incrementalmente adquirem conhecimento e compreensão de um, a compreensão do outro é facilitada (Byrnes e Wasik, 1991; Kilpatrick, Swafford e Findell, 2001; Rittle-Johnson e Alibali, 1999; Rittle-Johnson, Siegel e Alibali, 2001; Saxton e Cakir, 2006). De fato, esta postura parece ser mais provida de senso comum. A menos que procedimento e conceito aflorassem rapidamente e de forma confiável nas mentes dos alunos sem qualquer indução, qual seria a razão de *não* ensinar ambos de forma concertada?

#### O problema do conhecimento conceitual

Como estão se saindo os estudantes americanos nesses três tipos de conhecimento? O *National Mathematics Advisory Panel* concluiu que os alunos americanos possuem conhecimento factual e procedural razoáveis, apesar de incompletos, e conhecimento conceitual pobre. Essas conclusões parecem sólidas, mas devem ser consideradas preliminares, porque não há avaliações atualizadas e abrangentes projetadas para esse tipo de dado. Ainda assim, estudos realizados nos últimos vinte anos indicam que alunos americanos, inclusive alunos universitários, não automatizaram completamente o processo de recuperação de fatos da memória (Geary, Frensch e Wiley, 1993; LeFevre *et al.*, 1996; Robinson *et al.*, 2006) nem alcançaram fluência nos procedimentos (Geary *et al.*, 1997; Geary *et al.*, 1999).

Mais preocupante é a falta de compreensão conceitual dos alunos americanos. Diversos estudos descobriram que muitos alunos não compreendem inteiramente o sistema numérico decimal, de base 10 (Fuson, 1990; Blöte, Van der Burg e Klein, 2001; Hiebert e Wearne, 1996). Um colega me trouxe este fato à atenção recentemente contando uma anedota espirituosa. Ele mencionou que um de seus alunos (um calouro em uma universidade de elite) argumentou que 0,015 era um número maior que 0,05 porque "15 é mais que 5". Foi impossível persuadir o aluno do contrário.

Outro problema conceitual comum é a compreensão de que o sinal de igual (=) se refere a igualdade – isto é, equivalência matemática. De acordo com algumas estimativas, apenas 25% - uma porcentagem

muito baixa - dos americanos na sexta série possuem uma compreensão substantiva deste conceito (Li, Ding, Capraro e Capraro, 2008). Os alunos frequentemente pensam que o sinal significa "coloque a resposta aqui em seguida". Já se argumentou que os livros didáticos para alunos e para futuros professores de matemática não tornam o significado do sinal de igualdade suficientemente claro, e nem oferecem exemplos de seu uso que ajudariam os leitores a compreender este significado (McNeil et al., 2006; Li, Ding, Capraro e Capraro, 2008). O custo da compreensão conceitual deficiente deve ficar claro. Achar que um sinal de igual significa "coloque a resposta aqui" causará confusão quando se observar pela primeira vez uma equação que possua termos em *ambos* os lados do sinal de igualdade. Quando se depara pela primeira vez com o processo de fatoração, o aluno deve perceber como ele se relaciona com a divisão, mas isto provavelmente não acontecerá se não houver uma profunda compreensão conceitual da divisão. (E, somente para enfatizar que os conhecimentos factual, procedural e conceitual caminham todos juntos, ele também terá o aprendizado da fatoração prejudicado se não tiver a tabela de multiplicação memorizada.)

Infelizmente, das três variedades de conhecimento que os alunos precisam ter, o conhecimento conceitual é o mais difícil de ser adquirido. Trata-se de um tipo de conhecimento difícil porque ele nunca é adquirido a partir do nada; um professor não pode incutir conceitos diretamente nas cabeças dos alunos. Em vez disso, novos conceitos devem ser assimilados sobre uma base, algo que os alunos já entendam. É por isso que exemplos são tão úteis ao se introduzir um novo conceito (Gelman, 2000). De fato, quando alguém apresenta uma definição abstrata (por exemplo, "o desvio padrão é uma medida da dispersão da distribuição"), nós normalmente pedimos um exemplo ("Dois grupos de pessoas podem ter a mesma altura média, mas um grupo tem muitas pessoas altas e muitas pessoas baixas, e, portanto, possui um desvio padrão grande, enquanto o outro grupo é formado em sua maioria por pessoas com altura em torno da média, e, portanto, possui baixo desvio padrão").

É também por isso que o conhecimento conceitual é tão importante ao longo do avanço dos alunos. O aprendizado de novos conceitos depende do que já se sabe, e, à medida que os alunos progridem, novos conceitos dependerão cada vez mais de conhecimento conceitual prévio. Por exemplo, a compreensão de equações algébricas depende de uma correta compreensão conceitual do sinal de igualdade. Se os alunos não

conseguem adquirir compreensão conceitual, torna-se cada vez mais difícil recuperar o atraso, já que conhecimento conceitual novo depende do prévio. Os alunos tendem cada vez mais a simplesmente memorizar algoritmos e aplicá-los sem uma compreensão mais profunda.

Então, como os alunos podem aprender conceitos? Nos Estados Unidos, muito se fala sobre o emprego de recursos didáticos manipuláveis – os materiais concretos - para ajudar as crianças a entender conceitos matemáticos abstratos, mas, é claro, os próprios manipulativos são abstratos – o aluno deve tratá-los como símbolos para uma outra coisa (Uttal, Scudder e DeLoache, 1997) - e manipulativos nem sempre ajudam no aprendizado – às vezes chegam a impedi-lo (McNeil, Uttal, Jarvin e Sternberg, 2009). Isto é mais provável quando os manipulativos são visualmente tão interessantes que distraem de seu propósito, ou quando sua relação com o conceito a ser representado é obscura.

Manipulativos parecem ser úteis porque são objetos concretos. Para ilustrar a ideia de fração, pode-se dividir um biscoito em dois com o propósito de compartilhá-lo com um aluno. Mas o quanto este exemplo é *concreto* é provavelmente menos importante do que o quanto ele é *familiar* (Carey, 1985; Inagaki e Hatano, 1987). Suponha que eu rasgasse um livro em dois pedaços e dissesse: "Viu? Agora existem dois pedaços. Cada um é um meio-livro." Este exemplo é concreto, mas menos eficiente porque não é familiar; o aluno não tem qualquer experiência com livros divididos, e o propósito de compartilhar também não está presente nesse caso. A concretude não é uma propriedade mágica que permite que professores insiram conceitos nas mentes de seus alunos. É a familiaridade que ajuda, porque permite que o professor faça o aluno pensar em coisas que já sabe de novas maneiras.

Familiaridade não é o único ingrediente necessário para exemplos de sucesso. É mais provável que alunos compreendam ideias abstratas quando observam vários exemplos (Chen, 1999; Mayer e Hegarty, 1996), de forma que possam aprender quais propriedades são importantes para o conceito (a divisão do objeto em partes iguais) e quais são incidentais (as partes resultantes podem ser compartilhadas). Os alunos com frequência falham em compreender o conceito se não forem expressamente instruídos a procurar atributos em comum entre os exemplos, ou se não lhes forem dadas pistas sobre quais são os atributos comuns (Richland, Morrison e Holyoak, 2006).

À medida que os conceitos se tornam mais complexos, tornase mais difícil criar exemplos familiares a partir das vidas dos alunos, de modo que professores passam a recorrer a analogias com maior frequência; uma situação familiar é apontada como análoga ao conceito, e não como exemplo do conceito. Assim, um professor pode dizer aos alunos que equações algébricas podem ser pensadas como uma escala de balança: os dois lados são equivalentes, e você mantém a equivalência desde que efetue a mesma operação em ambos os lados. Estudos de laboratório revelaram diversos princípios que tornam analogias especialmente eficientes: familiaridade (e.g., os alunos sabem o que é uma balança), concretude (mostrar "ao vivo" uma balança para que os alunos possam ver), fazer o alinhamento ficar claro (e.g., escrevendo os dois lados da equação sobre os dois lados de um desenho da balança) e continuar a reforçar a analogia (e.g., referindo-se à balança em momentos apropriados durante a resolução da equação). Alguns dados indicam que professores de matemática em Hong Kong e no Japão (onde o desempenho em matemática é consistentemente alto) são especialmente eficientes na utilização de analogias de acordo com esses princípios (Richland, Zur e Holyoak, 2007).

#### Qual o significado disso tudo para o ensino?

1. Pense cuidadosamente em como cultivar o conhecimento conceitual e encontre uma analogia que possa ser usada em diferentes tópicos. Dos três tipos de conhecimento mencionados, este é o mais difícil para os alunos aprenderem. Ver e ouvir vários exemplos diferentes de um conceito é útil para abstrair a ideia principal e aprender que aspectos do exemplo são irrelevantes. Também é útil para os alunos aprender uma única analogia à qual eles possam retornar sempre. Usar a mesma analogia para diversos tópicos torna muito mais claro para os alunos como esses tópicos se relacionam uns com os outros.

Traçar conexões entre tópicos matemáticos aprofunda o conhecimento conceitual, mas este é um dos resultados desejados mais raramente alcançados nos Estados Unidos. Em contraste, desenvolver o conhecimento sistematicamente a partir de modelos simples é o cerne do método de Cingapura (Hong, Mei e Lim, 2009), que parece ter bastante sucesso, dada a alta performance dos alunos cingapurianos. Professores podem não ter a liberdade de adotar um

currículo de sua escolha, mas as vantagens cognitivas da proposta do modelo (*veja o quadro na página 61*) são impressionantes.

- 2. Ao cultivar o maior conhecimento conceitual, não sacrifique os conhecimentos factual e procedural. O conhecimento procedural sem conhecimento conceitual é superficial e dificilmente será transferido para novos contextos, mas o conhecimento conceitual sem o conhecimento procedural é ineficaz. Faça um elo entre o conhecimento conceitual e procedimentos que os alunos estejam aprendendo, de forma que o "como" tenha um "porquê" significativo associado a ele; um irá reforçar o outro. Um vasto conhecimento conceitual pode ajudar o aluno a passar de uma mera competência com fatos e procedimentos para uma automaticidade que ele precisa para ser bom em resolver problemas. Mas, se reduzirmos o trabalho a fatos e procedimentos, o resultado será provavelmente desastroso.
- 3. Ao ensinar conhecimento procedural e factual, assegure-se de que os alunos atinjam automaticidade. Explique aos alunos que a automaticidade com procedimentos e fatos é importante porque libera suas mentes para pensar sobre conceitos. Para que haja automaticidade com conhecimento procedural, assegure-se de que os alunos se tornem fluentes na operação de algoritmos padrão. Isto requer alguma memorização e bastante prática. Para o conhecimento factual, assegure-se de que os alunos tenham memorizado fatos matemáticos básicos, como a tabela de multiplicação até 12 x 12.
- 4. Escolha um currículo que dê apoio ao conhecimento conceitual. Se o conhecimento conceitual é de fato tão difícil de aprender, faz sentido (1) estudar somente alguns conceitos por ano, mas estudá-los em profundidade, para que haja tempo suficiente para compreender um conceito antes que o próximo seja introduzido; (2) sequenciar tópicos para que, na medida do possível, a distância mental entre conceitos seja pequena e o conceito previamente aprendido ajude no aprendizado de cada novo conceito. Estes dois sábios preceitos (juntamente com um terceiro, o rigor) são exatamente os que William

<sup>5</sup> Para uma leitura mais profunda sobre como ensinar de forma que os conhecimentos conceitual, factual e procedural se reforcem mutuamente, veja "Skills Versus Conceptual Understanding: A Bogus Dichotomy in Mathematics Education" de Hung-His Wu, na edição de outubro de 1999 de *American Educator*, disponível na internet na página www.aft.org/pubs-reports/american\_educator/fall99/wu.pdf.

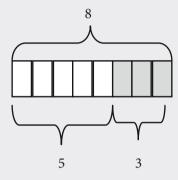
Schmidt defendia, com base na sua análise de currículos de países que se sobressaem na matemática.<sup>6</sup>

5. Não deixe passar em branco quando um aluno disser "Eu não sou bom em matemática". Nós escutamos muito isto, mas raramente é verdade. Pode ser verdade que o aluno considere a matemática mais difícil do que outras disciplinas, mas com alguma persistência e trabalho duro o aluno pode aprender matemática – e, à medida que aprender mais, esta tarefa se tornará mais fácil. Ao atribuir a dificuldade a uma qualidade imutável inerente a ele, o aluno está dizendo que ele é incapaz de ter êxito.

<sup>6</sup> Para saber mais sobre a pesquisa de Schmidt e a necessidade de foco, coerência e rigor nos currículos matemáticos, veja "What's Missing from Math Standards?" na edição da primavera de 2008 de *American Educator*, disponível na internet na página www.aft.org/pubs-reports/american\_educator/issues/spring2008/schmidt.htm.

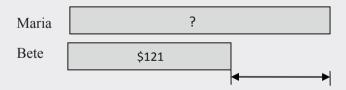
O Modelo de Cingapura utiliza modelos gráficos para ajudar os alunos a compreenderem conceitos matemáticos. Estes modelos são introduzidos nas primeiras séries, começando com objetos reais, mas rapidamente passam a utilizar barras, como mostrado nos dois exemplos a seguir. Ambos os modelos podem representar a mesma função, neste caso a adição.

1. O modelo parte-e-todo enfatiza que duas partes de uma barra, como as 5 seções e as 3 seções mostradas aqui, podem também ser consideradas em conjunto, como um todo, com 8 seções.



2. O modelo de comparação enfatiza a comparação entre duas barras. Por exemplo, alunos podem usar este modelo para representar o seguinte problema:

Bete economizou \$121. Ela economizou \$63 a menos que Maria. Quanto Maria economizou?\*



Em séries mais avançadas, estas barras podem facilmente se tornar retas numéricas. Os dois modelos podem ser usados para muitos dos conceitos fundamentais de álgebra: as quatro operações, frações, razões e percentagens.

<sup>\*</sup> Kho Tek Hong, Yeo Shu Mei e James Lim, The Singapore Model Method for Learning Mathematics (Cingapura: PanPac, 2009), p. 20.

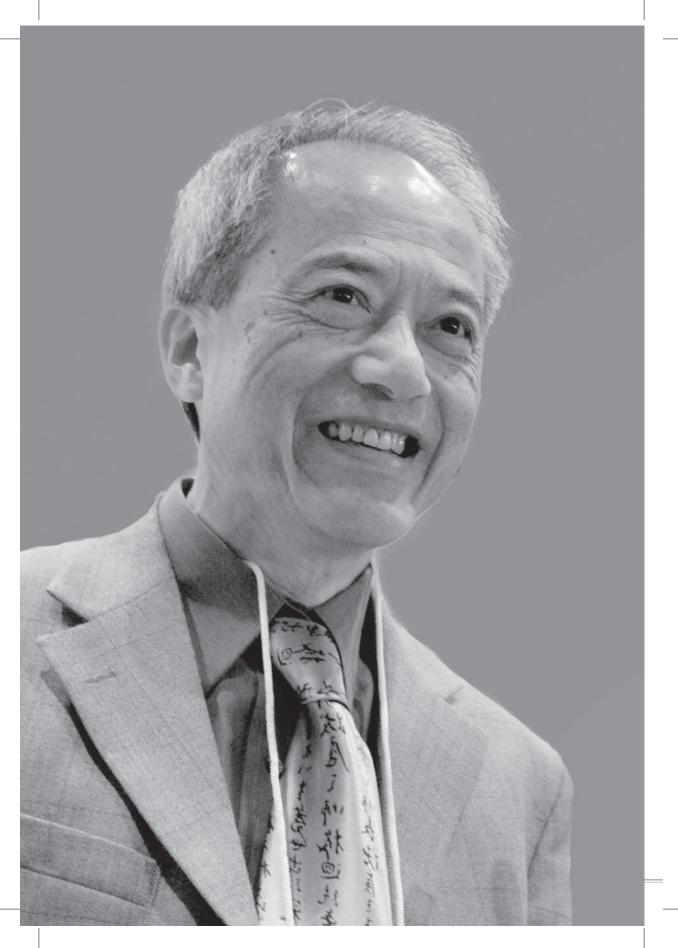
#### Referências

- Andersson, Ulf. "Mathematical Competencies in Children with Different Types of Learning Difficulties," *Journal of Educational Psychology* 100, no. 1 (2008): 48–66.
- Baroody, A. J.; Feil, Y.; Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 115-131.
- Benton, A. L. (1992). Gerstmann's syndrome. Archives of Neurology, 49, 445-447
- Berch, D. B.; Foley, E. J.; Hill, R. J.; Ryan, P. M. (1999). Extracting parity and magnitude from Arabic numerals: developmental changes in number processing and mental representation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74, 286–308.
- Blöte, Anke W.; Van der Burg, Eeke; Klein, Anton S. "Students' Flexibility in Solving Two-Digit Addition and Subtraction Problems: Instructional Effects", *Journal of Educational Psychology* 93, no. 3 (2001): 627–638
- Booth, J. L.; Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, 42, 189-201.
- Brannon, E. M. (2002). The development of ordinal numerical knowledge in infancy. *Cognition*, 83, 223–240.
- Brannon, Elizabeth M.; Terrace, Herbert S. "Ordering of the Numerosities 1 to 9 by Monkeys". *Science* 282 (1998): 746–749.
- Byrnes, J. P. (1992). The conceptual basis of procedural learning. *Cognitive Development*, 7, 235-257
- Byrnes, J. P.; Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology*, *27*, 777-786.
- Canobi, K. H.; Reeve, R. A.; Pattison, P. E. (1998). The role of conceptual understanding in children's addition problem-solving. *Developmental Psychology*, 34, 882–891.
- Carey, Susan (1985). Conceptual Change in Childhood. Cambridge, MA: MIT Press.
- Changizi, M. A.; Qiong Zhang, H. Y.; Shimojo, S. (2006). The Structures of Letters and Symbols throughout Human History Are Selected to Match Those Found in Objects in Natural Scenes. *American Naturalist*, 167, E117–F139
- Chen, Zhe. "Schema Induction in Children's Analogical Problem Solving," *Journal of Educational Psychology* 91, no. 4 (1999): 703–715.
- Dehaene, S.; Bossini, S.; Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and numerical magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, 122, 371–396.
- Dehaene, S.; Cohen, L. (2007). Cultural recycling of cortical maps. *Neuron*, 56, 384–398.
- Dehaene, S.; Izard, V.; Spelke, E.; Pica, P. (2008). Log or linear? Distinct intuitions of the number scale in western and Amazonian indigene cultures. *Science*, 320, 1217–1220.
- Dixon, J. A.; Moore, C. F. (1996). The developmental role of intuitive principles in choosing mathematical strategies. *Developmental Psychology*, 32, 241-253.

- Feigenson, L.; Carey, S.; Hauser, M. (2002). The representations underlying infants' choice of more: Object files versus analog magnitudes. *Psychological Science*, 13, 150-156.
- Frye, D.; Braisby, N.; Love, J.; Maroudas, C.; Nicholls, J. (1989). Young children's understanding of counting and cardinality. *Child Development*, 60, 1158-1171.
- Fuson, K.C. (1990). Conceptual structures for multiunit numbers: Implications for learning and teaching multidigit addition, subtraction, and place value. *Cognition and Instruction*, *7*, 343–403.
- Geary, D. C.; Frensch, P. A.; Wiley, J. G. (1993). Simple and complex mental subtraction: Strategy choice and speed-of-processing differences in younger and older adults. *Psychology and Aging*, *8*, 242-256.
- Geary, D. C. et al. (1997). Computational and reasoning abilities in arithmetic: Cross-generational change in China and the United States. *Psychonomic Bulletin & Review*, 4, 425-430.
- Geary, David C. *et al.* "Contributions of Computational Fluency to Cross-National Differences in Arithmetical Reasoning Abilities", *Journal of Educational Psychology* 91, no. 4 (1999): 716–719.
- Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 21, 27-37.
- Goldman, S.; Pellegrino, J. (1987). Information processing and educational microcomputer technology: Where do we go from here? *Journal of Learning Disabilities*, 20, 144-154.
- Hasselbring, T.; Goin, L.; Bransford, J. (1988). Developing math automaticity in learning handicapped children: The role of computerized drill and practice. *Focus on Exceptional Children*, 20(6), 1-7.
- Hauser, M.D.; Carey, S.; Hauser, L. B. (2000). Spontaneous number representation in semi-free-ranging rhesus monkeys. Proceedings of the Royal Society of London, B: Biological Sciences, 267, 829–833
- Hecht, S. A. (2002). Counting on working memory in simple arithmetic when counting is used for problem solving. *Memory & Cognition*, 30, 447–455.
- Hiebert, J.; Wearne, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, *14*, 251–283.
- Hong, Kho Tek; Mei, Yeo Shu; Lim, James, *The Singapore Model Method for Learning Mathematics* (Singapore: PanPac, 2009).
- Inagaki, Kayoko; Hatano, Giyoo, "Young Children's Spontaneous Personification as Analogy", *Child Development* 58 (1987): 1013–1020.
- Jordan, Nancy C.; Hanich, Laurie B.; Kaplan, David. "Arithmetic Fact Mastery in Young Children: A Longitudinal Investigation," *Journal of Experimental Child Psychology* 85, no. 2 (2003b): 103–119.
- Kail, Robert; Hall, Lynda K. "Sources of Developmental Change in Children's Word-Problem Performance". Journal of Educational Psychology 91, no, 4 (1999): 660–668.
- Kilpatrick, J.; Swafford, J.; Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press;

- Klapp, S. T.; Boches, C. A.; Trabert, M. L.; Logan, G. D. (1991). Automatizing alphabet arithmetic: II. Are there practice effects after automaticity is achieved? *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition*, 17, 196–209.
- Knops, A.; Thirion, B.; Hubbard, E. M.; Michel, V.; Dehaene, S. (2009).
  Recruitment of an area involved in eye movements during mental arithmetic.
  Science, 19 June 2009: Vol. 324 no. 5934 pp. 1583-1585, disponível em <a href="http://www.sciencemag.org/content/324/5934/1583.abstract">http://www.sciencemag.org/content/324/5934/1583.abstract</a>
- Lee, Kerry; Lynn Ng, Ee; Fong Ng, Swee. "The Contributions of Working Memory and Executive Functioning to Problem Representation and Solution Generation in Algebraic Word Problems", *Journal of Educational Psychology* 101, no. 2 (2009): 373–387.
- LeFevre, J.A., et al. (1996). Multiple routes to solution of single-digit multiplication problems. *Journal of Experimental Psychology: General, 125*, 284–306.
- Li, X.; Ding, M.; Capraro, M. M.; Capraro, R. M. (2008). Sources of differences in children's understandings of mathematical equality: Comparative analysis of teacher guides and student texts in China and the United States. *Cognition* and Instruction, 26, 195-217.
- Mayer, Richard E.; Hegarty, Mary. (1996). "The Process of Understanding Mathematical Problems", in *The Nature of Mathematical Thinking*, ed. Robert J. Sternberg and Talia Ben-Zeev, Mahwah, NJ: Erlbaum.
- McNeil, N. M. et al. (2006). Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help. Cognition and Instruction, 24, 367-385.
- McNeil, N. M.; Uttal, D. H.; Jarvin, L.; Sternberg, R. J. (2009). Should you show me the money? Concrete objects both hurt and help performance on mathematics problems. *Learning and Instruction*, 19, 171–184.
- Meck, W.H.; Church, R.M. (1983). A mode control model of counting and timing processes. *Journal of the Experimenta Analysis of Behavior*, 9, 320–334
- Pica, Pierre *et al.* "Exact and Approximate Arithmetic in an Amazonian Indigene Group," Science 306 (2004): 499–503.
- Rasmussen, Carmen; Ho, Elaine; Bisanz, Jeffrey. "Use of the Mathematical Principle of Inversion in Young Children," *Journal of Experimental Child Psychology* 85, no. 2 (2003): 89–102.
- Richland, Lindsey E.; Morrison, Robert G.; Holyoak, Keith J., "Children's Development of Analogical Reasoning: Insights from Scene Analogy Problems", *Journal of Experimental Child Psychology* 94, no. 3 (2006): 249–273.
- Richland, Lindsey E.; Zur, Osnat; Holyoak, Keith J., "Cognitive Supports for Analogies in the Mathematics Classroom", *Science* 316 (2007): 1128–1129.
- Rittle-Johnson, Bethany; Alibali, Martha Wagner. "Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics: Does One Lead to the Other?" *Journal of Educational Psychology* 91, no. 1 (1999): 175–189.
- Rittle-Johnson, Bethany; Siegler, Robert S.; Alibali, Martha Wagner. "Developing Conceptual Understanding and Procedural Skill in Mathematics: An Iterative Process", *Journal of Educational Psychology* 93, no. 2 (2001): 346–362.

- Robinson, Katherine M. et al. "Stability and Change in Children's Division Strategies," Journal of Experimental Child Psychology 93, no. 3 (2006): 224–238.
- Royer, J.M.; Tronsky, L.N. (1998). Addition practice with math disabled students improves subtraction and multiplication performance. Advances in Learning and Behavioral Disabilities, 12, 185-217.
- Russell, R.L.; Ginsburg, H.P. (1984). Cognitive analysis of children's mathematical difficulties. *Cognition and Instruction*, 1, 217–244.
- Saxton, M.; Cakir, K. (2006). Counting-On, Trading and Partitioning: Effects of Training and Prior Knowledge on Performance on Base-10 Tasks. *Child Development*, 77, 767-785.
- Senghas, Ann; Kita, Sotaro; Özyürek, Asli. "Children Creating Core Properties of Language: Evidence from an Emerging Sign Language in Nicaragua", *Science* 305 (2004): 1779–1782.
- Siegler, R. S.; Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75, 428–444.
- Siegler, R. S.; Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quality. *Psychological Science*, 14, 237–243.
- Star, J. R. (2007). Foregrounding procedural knowledge. Journal for Research in Mathematics Education, 38, 132–135.
- Steel, Sylvia; Funnell, Elaine. "Learning Multiplication Facts: A Study of Children Taught by Discovery Methods in England," *Journal of Experimental Child Psychology* 79, no. 1 (2001): 37–55.
- Swanson, H. Lee; Beebe-Frankenberger, Margaret. "The Relationship between Working Memory and Mathematical Problem Solving in Children at Risk and Not at Risk for Serious Math Difficulties", *Journal of Educational Psychology* 96, no. 3 (2004): 471–491.
- Temple, E.; Posner, M.I. (1998) Brain mechanisms of quantity are similar in 5-year-olds and adults. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 95, 7836–7841
- Tournaki, N. (2003). The Differential Effects of Teaching Addition Through Strategy Instruction Versus Drill and Practice to Students With and Without Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *36*, 449-458.
- Trick, L.; Pylyshyn, Z.W. (1994). Why are small and large numbers enumerated differently? A limited capacity preattentive stage in vision. *Psychological Review*, 101, 80–102
- Tronsky, L. N. (2005). Strategy use, the development of automaticity, and working memory involvement in complex multiplication. *Memory & Cognition*, 33, 927–940.
- Uttal, D. H.; Scudder, K. V.; DeLoache, J. S. (1997). Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18, 37-54.
- Van Oeffelen, M.P.; Vos, P.G. (1982). A probabilistic model for the discrimination of visual number. *Perception & Psychophysics*, 32, 163–170.
- Xu, F.; Spelke, E.S. (2000). Large number discrimination in 6-month old infants. *Cognition 74*, B1–B11.



## A matemática que os professores das séries iniciais precisam conhecer

Hung-Hsi Wu

Este capítulo está dividido em duas partes: a primeira, apresenta uma avaliação geral das características básicas da matemática ensinada nas séries iniciais. Esta parte é seguida de alguns exemplos usados para ilustrar a discussão geral. A segunda e maior parte do capítulo é dedicada a descrever a matemática que os professores das séries iniciais devem conhecer.

#### Parte I: A matemática ensinada nas séries iniciais

Matemática escolar é a expressão que utilizamos para denominar o "corpo" de conhecimento matemático que um professor precisa ter para estar apto a ensinar nas escolas. No mínimo, esse corpo inclui uma versão ligeiramente mais sofisticada da matemática ensinada aos alunos, isto é, todos os tópicos-padrão da estrutura do currículo da matemática escolar. Na Parte II deste capítulo, será apresentada uma discussão breve, porém sistemática, a respeito daquilo que os professores das séries iniciais precisam conhecer sobre a matemática escolar. Em outras palavras, tentaremos quantificar, tanto quanto possível, do que se trata este *quê* a mais de "sofisticação".

A necessidade de que os professores conheçam a matemática escolar em um nível um pouco mais avançado do que aquele

encontrado nos livros didáticos provavelmente não é motivo de controvérsias. Afinal, se eles precisam inventar questões de exames e responder a perguntas dos alunos - algumas das quais podem ser inesperadamente profundas -, um conhecimento apenas mínimo da matemática escolar não é suficiente. Talvez igualmente incontroverso seja o fato de que, mesmo com a matemática no sentido mais restrito, há algo um pouco além dos conceitos e práticas básicas do currículo escolar que os professores precisam conhecer para ter sucesso na sala de aula. Por exemplo, os professores precisam contar uma história quando introduzem um tópico, e a trama desta história, embora seja sobre matemática, não seria usualmente parte de um currículo escolar de matemática comum. Eles precisam motivar seus alunos, explicando por que vale a pena aprender o tópico em questão, e tal motivação tampouco é encontrada com frequência em livros escolares. Na medida em que a matemática é um corpo coerente de conhecimento, e não uma coleção de truques a serem memorizados, os professores precisam saber o suficiente sobre a disciplina para proporcionar uma continuidade entre um dia e outro, entre uma lição e a seguinte. Esses fios conectores dentro da matemática também não fazem parte do currículo escolar. Os professores não podem atribuir o mesmo peso a cada um dos tópicos do currículo porque nem todos os tópicos têm a mesma natureza; eles precisam diferenciar os tópicos verdadeiramente básicos daqueles que são relativamente periféricos. E não podem fazer essa distinção sem um conhecimento mais profundo da estrutura da matemática. E assim por diante. Tudo isso é, sem dúvida, parte do conhecimento matemático que deve ser parte no arsenal intelectual de qualquer professor, mas as várias ramificações desse componente da matemática para o ensino nas escolas ainda não foram bem articuladas na literatura sobre educação. Na Parte I deste capítulo, buscaremos promover essa articulação. Para isso, julgamos necessário dar um passo para trás e examinar a natureza da educação em matemática.

Além da constatação primária de que a educação matemática diz respeito tanto à matemática em si quanto à educação, nós postulamos que a educação matemática é **engenharia matemática**, no sentido em

que ela é a customização dos princípios matemáticos básicos para o consumo dos alunos (Wu, 2006). Aqui nós entendemos que "engenharia" é a arte ou ciência de customizar a teoria científica para adaptá-la às necessidades das pessoas. Assim, a engenharia química é a ciência de customizar princípios abstratos em química de forma a ajudar a resolver problemas do dia a dia, ou a engenharia elétrica é a ciência de customizar a teoria eletromagnética com o objetivo de projetar todos os apetrechos tecnológicos que se tornaram indispensáveis para nós. Ao aceitar esta proposição de que a educação matemática é engenharia matemática, podemos ver que a matemática escolar é o produto do processo de engenharia que converte a matemática abstrata em lições utilizáveis nas salas de aula das escolas, e professores de matemática dessas escolas são, portanto, engenheiros-técnicos em matemática encarregados de ajudar os consumidores (i.e., os alunos da escola) a utilizar de forma eficiente esse produto e fazer reparos quando necessário.

Esse esclarecimento sobre a natureza da educação matemática nos ajuda a compreender alguns problemas educacionais atuais. A falha em reconhecer o aspecto *de engenharia* da educação matemática leva a uma falha em reconhecer que a *matemática escolar* é um produto de engenharia, e, portanto, se distingue daquela que é ensinada em cursos universitários básicos de matemática. Talvez essa seja a razão pela qual, até recentemente, a matemática escolar tenha sido percebida como nada além de um subconjunto da matemática universitária (Ball, 1990; Wu, 1999a, e Wu, 1999b; NRC, pp. 372-378; MET; Wu, 2011a). A defesa de que a matemática ensinada em escolas deve ser reconhecida como uma subdisciplina independente da matemática é recente (cf. Ball-Hill-Bass; Wu, 2006; Wu, 2011a).

Assim como técnicos de qualquer área de engenharia devem possuir uma "intuição" profissional que os ajude a prevenir possíveis desastres na miríade de situações inesperadas nas quais eles são colocados, professores de matemática precisam saber algo sobre a essência da matemática para cumprir seus deveres em sala de aula com sucesso. Para dar um exemplo simples, estaria um professor apto a argumentar com seus alunos que não há sentido em discutir se um

quadrado é um retângulo porque tudo depende de como se define um retângulo, e que matemáticos optam por definir retângulos de forma a incluir quadrados porque isto faz mais sentido em diversos cenários *matemáticos*, tais como a discussão de fórmulas de área e volume? Isto seria uma questão de compreender o papel das *definições* na matemática. Ou, um professor utilizaria a multiplicação de frações para "explicar"

por que  $\frac{m}{n} = \frac{cm}{cn}$  para qualquer fração  $\frac{m}{n}$  e qualquer número inteiro e diferente de zero c, argumentando que

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{n} \times 1 = \frac{m}{n} \times \frac{c}{c} = \frac{cm}{cn}$$
?

Nessa mesma linha, um professor ensinaria as operações aritméticas com frações como se "frações fossem um tipo diferente de número" e como se estas operações aritméticas nenhuma ou pouca relação tivessem com as operações com números inteiros? Para não cometer os dois últimos erros, um professor deve saber algo sobre a coerência da matemática.

No momento, a maioria dos professores não tem a oportunidade de aprender sobre os tópicos básicos da matemática escolar, muito menos sobre a essência da matemática (Ball, 1990; Wu, 1999a, e Wu, 1999b; NRC, pp. 372-378; Capítulos 1 e 2 do MET; Wu, 2002a). Por exemplo, apenas um ou dois cursos de matemática são pré-requisitos para professores em estágio de formação na maioria das Faculdades de Educação dos Estados Unidos (e.g., NCTQ, p. 25), o que está longe de ser adequado para fazer com que esses professores "desaprendam" todas as noções erradas que adquiriram como alunos nessas escolas. Basta observar a maioria dos livros didáticos de matemática escrita para professores da escola elementar, por exemplo, para se ter uma ideia de quão longe estamos de fornecer a esses professores o conhecimento matemático requerido (novamente, NCTQ, pp. 35-37). Pior, evidências não comprovadas cientificamente sugerem que alguns cursos de matemática considerados pré-requisitos podem ser sobre "álgebra

universitária" ou outros tópicos não relacionados com a matemática das séries iniciais. Tendo em vista obstáculos tão grandes, é incompreensível que algum conhecimento de cálculo já seja considerado muitas vezes um atestado de honra entre os professores da escola elementar. Ainda que mais conhecimento seja sempre preferível a menos, pode-se argumentar persuasivamente que, enquanto os professores não possuírem uma base sólida nos tópicos matemáticos que devem ensinar na sala de aula, qualquer conhecimento de cálculo acaba sendo bastante irrelevante.

Em termos gerais, uma lacuna tão evidente no desenvolvimento profissional dos futuros professores de matemática se deve, em parte, à falha em reconhecer que a matemática escolar é um produto de engenharia, que se distingue, portanto, da matemática que é ensinada nos cursos universitários básicos de matemática. Ensinar matemática escolar para nossos futuros professores requer trabalho extra, e a "maneira usual" não vai dar conta do recado. Existe outra razão. A Educação em si é cercada de muitas preocupações; e.g., equidade, estratégias pedagógicas, desenvolvimento cognitivo etc. No meio dessa mistura, as escolas de educação podem não dar a devida atenção à aquisição de conhecimento sobre o conteúdo matemático. E, de fato, a matemática muitas vezes se perde na confusão.

Para aprofundar a discussão, seria preciso maior especificidade. Propomos, portanto, que as seguintes cinco **características básicas** capturam a essência da matemática que é importante para o ensino fundamental e médio:

**Precisão**: Enunciados matemáticos são claros e sem ambiguidades. Em qualquer momento, é claro o que se sabe e o que não se sabe.

**Definições**: Elas são a base da estrutura matemática. Constituem a plataforma que suporta o raciocínio lógico. Sem definições, nada de matemática.

Raciocínio lógico: É a força vital da matemática, o motor que impulsiona a resolução de problemas. Sua ausência é a causa fundamental da "decoreba".

**Coerência**: A matemática é uma grande tapeçaria na qual todos os conceitos e práticas estão tecidos juntos. É uma malha única.

**Intencionalidade**: A matemática é orientada pelos objetivos, e cada conceito e prática está lá por um motivo. Não se trata de jogos e diversão apenas.

Essas características não são independentes umas das outras. Por exemplo, sem definições, não existiria raciocínio lógico, e sem raciocínio lógico, não haveria coerência. Se elas são listadas separadamente, é somente porque proporcionam referências fáceis em qualquer discussão.

Cabe enfatizar a característica da intencionalidade. Uma das razões pela qual os alunos não se sentem inspirados a aprender matemática é que suas lições são apresentadas a eles como *algo que eles devem aprender*, quer queiram, quer não. O fato é que a matemática é uma coleção de correntes conectadas entre si, e cada conceito ou prática parece ser um elo de uma corrente, servindo ao propósito de sustentar outro em algum momento. Os alunos deveriam poder ver por conta própria que o currículo matemático não avança sem um objetivo.

Podemos dar uma primeira justificativa sobre a importância dessas cinco características para o ensino de matemática nas escolas. Para alunos que desejam se tornar cientistas, engenheiros ou matemáticos, o tipo de matemática necessária é aquela que respeita essas características básicas. Embora essa afirmação nada mais seja do que uma opinião profissional neste ponto, pesquisas podem ser conduzidas para sustentar sua validade. Aceitando a afirmação, ainda que provisoriamente, percebemos que os alunos provavelmente não aprendem esse tipo de matemática se seus professores não a conhecem. Também notamos, de uma perspectiva mais ampla, por que todo aluno precisa saber este tipo de matemática. Isso é verdade porque, se a educação matemática escolar deve fazer jus a seu potencial educacional de proporcionar a melhor disciplina da mente no currículo escolar, então desejaríamos expor todos os alunos a uma forma de pensar precisa, lógica e coerente. Isso então fornece outro motivo pelo qual os professores precisam conhecer o tipo de matemática que respeita essas características básicas.

Entretanto, a justificativa final sobre a necessidade de os professores conhecerem essas cinco características deve estar na demonstração de que aqueles que as conhecem são melhores professores, no sentido em que eles melhor se fazem compreender pelos alunos e, portanto, possuem maiores chances de ganhar sua confiança. Essas são hipóteses testáveis por meio de pesquisas, mesmo que tais pesquisas ainda estejam em falta no momento. Nesse meio tempo, a vida segue, e não podemos nos dar ao luxo de não fazer nada enquanto esperamos resultados de pesquisas. Portanto, prosseguiremos aqui com uma argumentação simples para a tese de que os professores devem ter familiaridade com essas características básicas, e também mostraremos diversos exemplos ilustrativos.

O argumento simples é o de que muitos alunos se desanimam com a matemática porque a veem como uma grande caixa-preta cuja chave nem mesmo os professores parecem possuir. Assim, professores que conseguem tornar transparente aquilo sobre o que estão falando (cf. definições e precisão), que podem explicar o que estão pedindo que seus alunos aprendam (ex. raciocínio lógico e coerência) e podem também explicar por que os alunos devem aprender aquilo (ex. intencionalidade) possuem uma chance bem melhor de estabelecer um diálogo com seus alunos e inspirá-los a participar do exercício da matemática.

Nós dividimos o restante desta discussão em duas partes. Na Parte I, utilizamos exemplos de diversos tópicos-padrão da matemática escolar para mostrar como os professores que conhecem as características básicas da matemática são provavelmente mais aptos a ensinar esses tópicos de uma maneira significativa. A Parte II ressalta os pontos principais no currículo escolar que são comumente mal representados na matemática nas escolas. Estes, portanto, devem ser o foco da formação do professor.

### Alguns Exemplos da Matemática ensinada nas séries iniciais

#### EXEMPLO 1: Valor posicional no sistema decimal

Considere um número tal como

Nós dizemos aos alunos que os três 7 representam valores diferentes por uma questão de convenção, e ainda assim esperamos que eles tenham uma compreensão conceitual de valor posicional. No final das contas, é difícil adquirir conhecimento conceitual sobre um conjunto de regras. Essa incongruência entre nosso input pedagógico e o resultado esperado parece ser um problema perene na educação matemática e é uma das principais causas das dificuldades de aprendizado.

Professores que sabem que a matemática é desenvolvida através do *raciocínio lógico* procurariam maneiras de explicar o motivo para tal regra. Quando o fizerem, descobrirão que, de fato, as regras do posicionamento das casas numéricas são consequências lógicas da forma que *escolhemos para contar*. Essa escolha é a de contar usando apenas dez símbolos: **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9**. Muitos sistemas numéricos mais antigos, como, por exemplo, o egípcio, basicamente criaram símbolos para números grandes conforme avançavam: um símbolo para uma centena, outro para um milhar, e ainda outro para dez milhares etc. Mas, ao nos limitarmos a utilizar dez símbolos e não mais, somos forçados a utilizar também mais de uma posição (casa), de forma a poder contar até grandes números.

Para ilustrar o raciocínio por trás disso, e ao mesmo tempo minimizar a enumeração de números, utilizaremos aqui *três* símbolos em vez de dez: **0**, **1**, **2** . É claro, a contagem agora se interrompe após três passos. Para continuar, uma maneira é repetir os três símbolos indefinidamente:

0 1 2 0 1 2 0 1 2 etc.

Isto nos permite continuar a contar até o infinito, mas o preço a pagar é que perdemos a noção de onde estamos nas infinitas repetições. Para ter controle das repetições, denominamos cada repetição com um símbolo à *esquerda*:

00 01 02 10 11 12 20 21 22

Adicionar um símbolo à esquerda de cada grupo de

0 1 2

nos permite contar, sem ambiguidades, até nove números (temos somente três símbolos para adicionar à nova posição na esquerda!). Então estamos empacados novamente. Para continuar, tentamos novamente repetir estes nove grupos de símbolos indefinidamente:

00 01 02 10 11 12 20 21 22 00 01 02 10 11 12 20 21 22 00 01 02 10 11 12 20 21 22 etc.

Isso apresenta o mesmo inconveniente da ambiguidade também presente anteriormente, a menos que novamente rotulemos cada repetição com um símbolo à *esquerda*:

000 001 002 010 011 012 020 021 022 100 101 102 110 111 112 120 121 122 200 201 202 210 211 212 220 221 222

Adotando a **convenção** de omitir os zeros da esquerda, obtemos os primeiros 27 números (27 = 9 + 9 + 9) em nosso esquema de contagem:

22	21	20	12	11	10	2	1	0
122	121	120	112	111	110	102	101	100
222	221	220	212	211	210	202	201	200

O próximo passo é repetir esses 27 números indefinidamente, e então rotular cada um deles, rotulando cada grupo de 27 números com um 0 e 1 e 2 à esquerda, obtendo assim os primeiros 81 (= 27+27+27) números não ambíguos em nosso sistema de contagem. E assim por diante.

Dessa maneira, os alunos podem ver a *origem do conceito de valor posicional*: utilizamos três casas apenas depois de ter esgotado todas as possibilidades com duas casas. Assim, o 2 em 201 não denota 2, e sim a *terceira* rodada de repetição dos 9 números de dois dígitos, i.e., o 2 em 201 significa que este é um número que vem depois do 18º número 200 (na vida cotidiana começamos a contar do 1), e o segundo e terceiro "dígitos" 01 significam mais precisamente que este é de fato o 19º número (9 + 9 + 1).

Da mesma forma, se utilizamos dez símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e adaptamos o raciocínio acima, notamos que, para um número como 374,

o 3 em 374 significa a *quarta* rodada de repetição dos 100 números de dois dígitos e portanto 374 é um número que vem depois do 300º número, 300, enquanto o segundo e terceiro "dígitos" 74 significam mais precisamente que 374 é o 300º –e–70º –e– 4º número.

Quando conhecem o raciocínio por trás do conceito de valores posicionais, os professores encontram toda uma variedade de opções pedagógicas se abrindo para eles. Em vez de simplesmente listar um conjunto de regras que dizem que cada casa denota um valor diferente, agora eles podem guiar seus jovens aprendizes passo a passo através do processo de contagem e fazê-los ver por conta própria por que cada *casa* de um número possui um significado diferente. Além disso, eles podem também convidar seus alunos a vivenciar o processo de contagem em um contexto diferente, utilizando qualquer número de símbolos (assim como usamos três acima). Em matemática, o conhecimento de conteúdo influencia fortemente a pedagogia (Wu, 2005).

## **EXEMPLO 2: Algoritmos básicos**

O ensino de algoritmos básicos de números inteiros não-negativos foi um ponto chamativo nas discussões das "guerras matemáticas". Em se tratando de teoremas-chave no estudo dos números inteiros, não há nenhuma dúvida de que esses algoritmos e suas explicações devem ser ensinados. Entretanto, seu maior mérito pode não parecer óbvio para os alunos no ensino básico, e a necessidade de que os professores advoguem em sua causa se tornou portanto fundamental. Nessa situação, um professor deve estar consciente das duas características de definições e coerência na matemática. Um requisito mínimo para o sucesso no ensino desses algoritmos é sempre deixar explícitas as definições das quatro operações matemáticas. Por exemplo, a adição de números inteiros **não-negativos** é, por definição, a contagem contínua, no sentido de que o significado de 1373 + 2615 é contar 2615 vezes além do número 1373. Um professor que sabe apreciar a importância das definições enfatizaria esse fato fazendo as crianças adicionarem números menores, como 13 + 9 ou 39 + 57, através de um processo de força bruta, contando continuamente. Quando as crianças veem o tipo de trabalho árduo envolvido na adição de números, o algoritmo de adição aparece então como um alívio, porque este algoritmo lhes permite substituir a onerosa tarefa de contar continuamente, com números que podem ser bastante grandes, pela contagem contínua com apenas números de um dígito. Armadas com essa descoberta, elas se tornarão mais motivadas a memorizar a tabela de adição para todos os números de um dígito e também para aprender o algoritmo de adição. Isso também proporcionará um incentivo para aprender o raciocínio por trás da maravilhosa ferramenta que as poupa de tanto trabalho.

Sendo a **multiplicação** a repetição do processo de adição, uma simples multiplicação tal como 48 × 27 demandaria, por definição, a adição de 27 + 27 + ... + 27 em um total de 48 vezes. Neste caso, até mesmo o algoritmo de adição não seria de grande ajuda. Novamente, um professor que queira enfatizar a importância das definições faria, por exemplo, com que as crianças encontrassem a resposta para 7×34 executando de fato a adição repetida. Aí, então, ensinar a elas o algoritmo de multiplicação

e sua explicação se tornaria significativo. Porque o aprendizado desse algoritmo depende do conhecimento de multiplicações de números de um dígito, as crianças podem perceber o motivo pelo qual elas devem memorizar a tabela de multiplicação (*intencionalidade*). Argumentos similares podem ser feitos a respeito da subtração e da divisão.

O forte contraste entre obter uma resposta através da aplicação de uma definição trabalhosa de cada operação aritmética e da utilização do algoritmo relativamente simples serve ao propósito de evidenciar as virtudes do último. Portanto, um professor que enfatiza as definições ao ensinar matemática teria ao menos uma chance de advogar com sucesso o aprendizado desses algoritmos, que não merecem nada menos que isso. Foi mencionado rapidamente que os algoritmos de adição e multiplicação dependem de cálculos com números de um dígito. É na verdade um tema unificador que a essência de todos os quatro algoritmos básicos é a redução de qualquer cálculo com números inteiros ao cálculo com números de um dígito (cf. Capítulo 3 de Wu, 2011b). Essa é uma poderosa ilustração da coerência da matemática, e um professor que está atento a essa característica básica enfatizaria tal comunalidade entre os algoritmos em seu ensino. Se um professor pode fornecer essa estrutura conceitual para esses procedimentos algorítmicos aparentemente diferentes, ele aumentaria suas chances de melhorar o aprendizado dos alunos (cf. discussões similares em Pesek-Kirschner, 2000; Rittle-Johnson-Alibali, 1999).

A propósito, para uma exposição sobre o algoritmo de divisão que enfatiza que esse algoritmo é uma iteração de cálculos de um dígito, veja a discussão no item (A) de **Números inteiros**.

#### **EXEMPLO 3: Estimativa**

Em anos recentes, o tema de estimativa se tornou um dos mais importantes na instrução matemática elementar. Na forma de arredondamento, ele aparece na maior parte dos currículos no segundo ano. Livros didáticos rotineiramente pedem que os alunos arredondem números inteiros para a unidade mais próxima, a dezena mais próxima, a centena mais próxima etc., sem explicar quando eles devem arredondar ou por quê. Um professor que conhece o conceito de intencionalidade da matemática sabe que, se uma prática vale a pena ser aprendida, então ela não pode ser apresentada como um exercício repetitivo e sem sentido. Esse professor introduziria em suas lições exemplos do cotidiano, que naturalmente levariam à necessidade de estimativa. Por exemplo, faria sentido dizer, em uma cidade montanhosa, que a temperatura do dia é de 33 graus? (Não, porque a temperatura dependeria da hora do dia, da altitude e da localização geográfica. Melhor arredondar para os 5 ou 10 mais próximos. "Aproximadamente 30 graus" faria mais sentido). Se Garth vive a duas quadras da escola, faria sentido dizer que sua casa está a 138m e 30cm da escola? (Não, porque como medir esta distância? De porta a porta ou da frente do jardim da casa de Garth até a frente do pátio da escola? Medindo ao longo da borda da calçada ou ao longo do meio da calçada? Ou a distância é medida como a menor entre os dois pontos? E assim por diante) Melhor arredondar para os 140m mais próximos, ou pelo menos para os 10m mais próximos. Diversos outros exemplos - tais como a população de uma cidade ou o comprimento da mesa de um aluno (em milímetros) - também poderiam ser dados. Quando um professor apresenta um contexto e uma necessidade de fazer uma estimativa, o arredondamento de números inteiros adquire significado, e se torna portanto uma prática matemática que pode ser aprendida.

Livros didáticos também apresentam a estimativa como uma ferramenta para verificar se o resultado de um cálculo é razoável. Aqui está um exemplo típico: 127 + 284 = 411 está provavelmente

correto? Uma apresentação na forma comumente encontrada em livros didáticos levaria os alunos a acreditar que, já que o arredondamento para a centena mais próxima transforma 127 + 284 em 100 + 300, que é 400, e 400 é próximo de 411, então 411 é uma resposta razoável. Um professor que esteja ciente da necessidade de *precisão* na matemática ficaria imediatamente cético em relação a tal forma de apresentação. Ele perguntaria o que quer dizer "400 é próximo de 411". Se modificarmos o problema para 147 + 149 = 296, de que forma esta abordagem do processo de estimativa verificaria se a resposta é razoável? O arredondamento para a centena mais próxima agora transforma 147 + 149 em 100 + 100, que dá 200, devemos considerar que 200 é "próximo" de 296?

O professor então percebe que, mesmo quando se trata de estimativa, há uma necessidade de ser preciso. Ele então abandonaria essa abordagem tão improvisada da estimativa, e em lugar dela ensinaria a seus alunos sobre os inevitáveis **erros** que são gerados a cada estimativa. Cada arredondamento para a centena mais próxima pode levar a resultados superestimados ou subestimados em até 50, e ele ensinaria a notação ± 50 para expressar este fato. Quando se somam duas estimativas por arredondamento para a centena mais próxima, o erro pode, portanto, ser tão alto quanto ±100. E isso foi exatamente o que aconteceu com a estimativa de 147 + 149: o erro ao compararmos 200 com o valor exato 296 é de 96, que é quase 100. Se utilizamos o arredondamento para a centena mais próxima como forma de verificar se o resultado de uma soma de dois números de três dígitos está razoável, devemos esperar um erro possivelmente tão alto quanto 100. Dessa forma, o professor está mostrando aos alunos que a declaração de "proximidade" para esta maneira de verificar uma soma é completamente sem sentido. Ele diria a seus alunos que se eles realmente desejam uma boa estimativa, no sentido em que ela estaria em uma margem de 10 do valor real, eles devem arredondar para a dezena mais próxima, e neste caso então o raciocínio acima levaria a um erro de ±10. Arredondando para a dezena mais próxima, a soma 147 + 149 se transforma em 150 + 150 = 300, e como 296 está a uma margem de 10 do valor estimado 300, pode-se ter alguma confiança na resposta 296.

Nesse caso, ensinar o conceito de erro em um processo de estimativa ajuda a afastar o professor do risco de ensinar algo matematicamente incorreto. Como a matemática dos livros didáticos é com frequência matematicamente inadequada (comparar Borisovich, ou NMPb, Apêndice B do Capítulo 3, pp. 3-63 a 3-65), um conhecimento das características básicas da matemática se torna de fato indispensável para o seu ensino. A propósito, se a estimativa é discutida em sala de aula no sexto ou sétimo ano, então os conceitos de "erro absoluto" e "erro relativo" também devem ser ensinados.

Para uma discussão mais aprofundada sobre por que estimativas são necessárias ou sobre a necessidade de indicar o erro relativo de uma estimativa, veja, e.g., o Capítulo 10 de Wu, 2011b.

## EXEMPLO 4: Frações, números decimais e percentagem

Colocaremos em foco aqui o ensino desses tópicos no 4º ano e nos anos seguintes. Escolhemos fazer desta forma porque é a partir deste ponto que o conhecimento informal a respeito de frações nas séries iniciais começa a dar lugar a uma apresentação formal, e é onde o empenho dos alunos em dominar a álgebra começa a tomar um rumo mais sério (cf. CCSS). É neste ponto que a abstração se torna absolutamente necessária pela primeira vez e, não por coincidência, é aí que o não-aprendizado da matemática começa a se estabelecer em larga escala (cf. Hiebert-Wearne, 1986; Carpenter-Corbittet al, 1981).

Na discussão a seguir, usamos o termo **fração** para denominar números sob a forma  $\frac{a}{b}$ , onde a e b ( $b \neq 0$ ) são números inteiros nãonegativos, e o termo **decimais** para denominar os *decimais finitos*.

Em termos gerais, os materiais de aprendizado comuns fazem os alunos acreditarem que

uma **fração** é um pedaço de pizza, parte de um todo, uma divisão e uma razão;

um **decimal** é um número que se escreve utilizando o conceito de *valor posicional estendido*: 43,76 é 4 dezenas, 3 unidades, 7 décimos e 6 centésimos; um **percentual** é parte de uma centena.

Professores que já ensinaram decimais dessa forma têm plena consciência de quão evasivo e ardiloso o conceito de valor posicional estendido pode ser (para o aluno), ao ponto em que os alunos não conseguem formar uma imagem concreta sobre o que é um decimal. Pode-se obter dados de pesquisa a respeito dessa observação diretamente. E, é claro, os alunos são solicitados a "raciocinar matematicamente" utilizando esses conceitos para resolver problemas quando tudo que lhes é fornecido é essa bagunça amorfa de informações.

Um professor que conhece as características de **coerência** da matemática saberia que, à medida que frações, decimais e percentagens são *números*, o conceito de número não deve ser apresentado aos alunos de maneira tão fragmentada quanto aquela sugerida pela sequência de "definições" acima. Por exemplo, a "definição" de fração sugerida possui componentes demais, e alguns deles nem mesmo fazem sentido. O que é uma "razão"? Se uma fração é só um pedaço de pizza, então, como multiplicar dois pedaços de pizza? E essas são apenas as duas preocupações mais ingênuas entre várias. Ademais, como decimais e percentagens são números, é importante que os alunos se sintam à vontade com sua manipulação em cálculos. Assim, se desejássemos tentar relacionar esta noção de 43,76 com alguma coisa familiar aos alunos, poderia ser  $40+3+\frac{7}{10}+\frac{6}{100}$  ? Se sim, então um decimal não

seria uma fração? E, portanto, por que não dizer explicitamente que

um decimal é uma fração obtida ao se adicionarem as frações acima? Analogamente, "parte de uma centena" supostamente significa uma fração cujo denominador é 100? Se a resposta é sim, então por que não utilizar isso como a definição em vez de empregar uma frase imprecisa como "parte de uma centena"?

O professor reconheceria a necessidade de uma *definição* de fração que fosse ao mesmo tempo precisa e correta. Tal definição consistiria em dizer que uma fração é **um ponto na linha numérica** construído de uma maneira prescrita e precisa, e.g.,  $\frac{2}{3}$  é o segundo ponto de divisão à direita de 0 quando o segmento de 0 a 1 é dividido em 3 segmentos de mesmo comprimento (ver discussão no item (B) de **Frações**; para uma abordagem mais extensa, ver Parte 2 de Wu, 2011b, e de uma maneira ligeiramente diferente, Jensen, 2003). Trabalhando sobre essa base, ele pode definir decimais e percentagens como tipos especiais de fração, da maneira descrita acima. Após uma firme apresentação dessas definições, ele utilizaria então o *raciocínio lógico* para explorar outras implicações

Um **decimal** é qualquer fração com denominador igual a uma potência de 10, e a notação de ponto decimal é somente uma abreviação para o expoente da potência, e.g., 3,52 e 0,0067 são, por definição,  $\frac{352}{10^2} \text{ e } \frac{67}{10^4}, \text{ respectivamente, e uma$ **percentagem** $é uma fração da forma <math>\frac{N}{100}$ , onde N é uma fração (Notação:  $\frac{N}{100}$  é escrito como N%).

e representações desses conceitos. Aqui estão as definições relevantes:

Note que  $\frac{N}{100}$  é a fração obtida ao dividir-se a fração N pela fração  $\frac{100}{1}$ . A divisão  $\frac{A}{B}$  de duas frações A e B ( $B \neq 0$ ) é chamada na

matemática escolar de **fração complexa**, e B continuará a ser chamado de **denominador** da fração complexa  $\frac{A}{B}$ . Portanto, estritamente falando, um percentual é *uma fração complexa cujo denominador é 100*.

O que esta discussão sugere é que um professor devidamente consciente da importância da *coerência* na matemática estaria mais apto a encontrar uma maneira de introduzir os conceitos de frações, decimais e percentagens através de uma perspectiva unificada, aliviando assim a carga cognitiva sobre os alunos e tornando estes conceitos tradicionalmente difíceis mais transparentes e fáceis de aprender. Como tal sugestão ainda não tem o apoio de dados, este é um tema que se mostra interessante para a pesquisa na área de educação.

Quais são as vantagens de se ter um conceito coerente a respeito de frações, decimais e percentagens? Considere este problema supostamente difícil para alunos da sexta e sétima séries:

Qual percentagem de 76 é 88?

De que forma um professor que está à vontade com as características básicas da matemática lidaria com isso? Sabendo que uma percentagem é uma fração, ele primeiramente sugeriria a seus alunos que olhassem para um problema cognato mais fácil: *que fração de 76 é* 88? Este problema é, por comparação, mais direto, isto é, se  $\frac{k}{l}$  é a fração tal que  $\frac{k}{l}$  de 76 é 88, então uma tradução direta de " $\frac{k}{l}$  de 76 é 88" é  $^1$ 

$$\frac{k}{l} \times 76 = 88$$

<sup>1</sup> Isto requer uma compreensão profunda da multiplicação entre frações. Ver a discussão no item (B) adiante em Frações.

A partir disso, ele chega a  $\frac{k}{l} = \frac{22}{19}$ . Agora então ele retorna ao problema

original: suponha que N% de 76 é 88. Como uma percentagem é uma fração, o mesmo raciocínio deve ser aplicado para obter

$$N\% \times 76 = 88$$

Portanto 
$$N = \frac{8800}{76} = 115 \frac{15}{19}$$
. Assim, a resposta é  $115 \frac{15}{19} \%$ .

Mostramos agora mais dois exemplos. O mesmo professor utilizaria a definição de um decimal para dar uma simples explicação sobre o algoritmo de multiplicação para decimais. Por exemplo, o algoritmo diz que, para multiplicar 2,6 × 0,105, deve-se

( $\alpha$ ) multiplicar os números inteiros correspondentes,  $26 \times 105$ , e () colocar o ponto decimal 4 (= 1 + 3) casas à esquerda do último dígito de  $26 \times 105$ , porque o ponto decimal em 2,6 (resp., 0,105) está 1 casa (resp., 3 casas) à esquerda do último dígito de 26 (resp., 105).

Ele aproveitaria esta oportunidade para ilustrar a utilização de definições precisas no **raciocínio** matemático. Calcularia  $2,6 \times 0,105$  da seguinte maneira:

$$2,6 \times 0,105 = \frac{26}{10} \times \frac{105}{10^3} \text{ (por definição)}$$

$$= \frac{26 \times 105}{10 \times 10^3} \text{ (isto é (a))}$$

$$= \frac{2730}{10^{1+3}}$$

$$= 0,2730 \text{ (isto é (B))}$$

Para o segundo exemplo, lembre que trouxemos à tona o conceito de *valor posicional estendido* na definição usual de um decimal. Na literatura sobre educação, esta noção *ad hoc* deve ser aceita na base da fé para a compreensão de decimais. Um professor que acredite na *coerência* da matemática poderia se perguntar se o conceito original de valor posicional ou "casa" já não é suficiente para o mesmo propósito. Ele descobriria que de fato é. Por exemplo, por que 3,712 é igual a  $3 + \frac{7}{10} + \frac{1}{100} + \frac{2}{1000}$  ? É porque, se conhecemos o conceito *usual* de valor posicional, então 3712 = 3000 + 700 + 10 + 2.

Portanto:

$$3,712 = \frac{3712}{1000}$$
$$= \frac{3000 + 700 + 10 + 2}{1000}$$

$$= \frac{3000}{1000} + \frac{700}{1000} + \frac{10}{1000} + \frac{2}{1000}$$
$$= 3 + \frac{7}{10} + \frac{1}{100} + \frac{2}{1000}$$

# EXEMPLO 5: O sinal de igual

A pesquisa em educação na área de álgebra percebe a compreensão falha dos alunos a respeito do sinal de igual como o principal motivo de seu fracasso no aprendizado de álgebra. Argumenta-se que os alunos consideram o sinal de igual um anúncio do resultado de uma operação matemática em vez da expressão de uma relação.

A conclusão é que a noção de "igual" é complexa e é difícil para os alunos compreendê-la.

Um professor que valorize a *precisão* na matemática reconheceria imediatamente este uso equivocado do sinal de igual como um provável

resultado de muita falta de atenção e cuidado na classe. Ele sabe quanto o descuido e a falta de atenção podem ser tentadores. Por exemplo, é muito conveniente escrever "27 dividido por 4 tem quociente 6 e resto 3" como

$$27 \div 4 = 6 \text{ resto } 3$$

Aqui está então um excelente exemplo da utilização do sinal de igual como "o anúncio do resultado de uma operação aritmética". Mas o professor também reconhece o triste fato de que esta maneira de escrever divisão-com-resto é empregada em todos os livros didáticos padrão, assim como em muitos materiais de desenvolvimento profissional, por comodidade.² Ele sabe muito bem que, se ensinamos aos professores algo de forma incorreta, então, por sua vez, eles ensinarão aos alunos de forma incorreta. Se as práticas de sala de aula e os livros didáticos encorajam tal descuido, os alunos que se desenvolvem nesse ambiente naturalmente herdariam a tendência ao descuido. A chamada "concepção equivocada" do sinal de igual é, portanto, provavelmente, a inevitável consequência da instrução matemática falha que nossos professores recebem de seus próprios professores e livros didáticos, e que eles passam, por sua vez, a seus alunos. De novo, isso é algo que a pesquisa em educação poderia validar ou refutar.

De uma perspectiva matemática, a noção de "igual" não possui ambiguidades e *não* é difícil de ser compreendida. O conceito de **igualdade** é uma questão de definições precisas. Se os professores puderem enfatizar a importância das *definições*, e sempre definir o sinal de igual em diferentes contextos com *precisão* e cuidado, as chances de os alunos fazerem mau uso do sinal de igual será bem menor. A preocupação essencial a respeito de qualquer má interpretação do sinal de igual é, portanto, algo que o treinamento pedagógico deveria tratar.

<sup>2</sup> A maneira correta de expressar a divisão-com-resto é, claro,  $27 = (6 \times 4) + 3$ 

Para reforçar o argumento de que o conceito de igualdade é uma questão de definição, aqui está a lista das *definições* mais comuns de A = B encontradas na matemática escolar:

- A e B são expressões com números inteiros não-negativos: verificase que A e B são o mesmo número pelo processo de contagem (e.g., A = 2 + 5, B = 4 + 3). Se números inteiros não-negativos já estão posicionados na linha numérica, então A = B significa que A e B correspondem ao mesmo ponto na linha numérica.
- A e B são expressões com **frações**: mesmo ponto na linha numérica (e.g.,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 2 1\frac{1}{6}$ ).
- *A* e *B* são expressões com **números racionais**: mesmo ponto na linha numérica (e.g.,  $\frac{1}{3} \frac{1}{2} = 1 2\frac{1}{6}$ ).
- $A \in B$  são dois **conjuntos**:  $A \subset B \in B \subset A$ .
- A e B são duas funções: A e B possuem o mesmo domínio de definição, e A(x) = B(x) para todos os elementos x em seu domínio comum.
- A = (a, a¹), B = (b, b¹) são pares ordenados de números: a = b
   e b = b¹ (O mesmo para trios ordenados).
- *A* e *B* são dois **polinômios abstratos**: igualdade do tipo de pares entre os coeficientes de mesma potência da variável.

# Parte II: A matemática para os professores das séries iniciais

Examinemos mais detalhadamente o que os professores de matemática precisam saber sobre a matemática escolar. Talvez como uma consequência da natureza hierárquica da matemática, o núcleo do conteúdo da matemática escolar parece ser essencialmente o mesmo em todos os países desenvolvidos, até onde sabemos. (Ver NMPb, Capítulo 3, pp. 3-31 a 3-32.) É verdade, existem pequenas variações que podem ser observadas, mas todas essas variações parecem estar

relacionadas à série designada para cada tópico ou ao sequenciamento de uma pequena parte dos tópicos. Tais diferenças são, entretanto, insignificantes em comparação ao acordo geral entre nações sobre os tópicos de base na matemática escolar *antes do cálculo*. Em termos de avanço ao longo das séries, os tópicos de base nos seis primeiros anos da escola são essencialmente os seguintes:

aritmética com números inteiros não-negativos, aritmética com frações, (alguns) números negativos, conceitos geométricos básicos, fórmulas básicas de medida geométrica, sistema de coordenadas no plano.

Uma vez que aceitamos que esses tópicos de base são o que nossos professores devem ensinar, a natureza hierárquica da matemática mencionada acima dita, na maior parte, o que os professores devem aprender e em que ordem. Nesse sentido, o conteúdo de conhecimento dos professores não é circunscrito pela pesquisa em educação, mas deve também ser guiado pelo bom senso matemático.

Antes de começarmos a tratar das especificidades da matemática que desejamos que os professores aprendam, convém refletir sobre a natureza desse corpo de conhecimento, já que ela tem influência sobre diversas discussões em andamento a respeito da formação de professores. Se concordarmos que os professores devem conhecer uma versão mais sofisticada da matemática escolar, o fato de que a matemática escolar é um produto de engenharia (ver discussão sobre a engenharia matemática na Parte I) significa que aquilo que os professores devem conhecer precisa satisfazer dois requerimentos aparentemente incompatíveis, a saber,

- (i) é a matemática que respeita as cinco características básicas,
- (ii) é suficientemente próxima do currículo escolar estabelecido de forma que os professores possam fazer uso direto dela nas salas de aula sem grandes esforços.

Tratemos especificamente da matemática escolar das séries iniciais. Provavelmente não há melhor ilustração da natureza dicotômica da matemática escolar do que o caso das frações, um tópico que foi discutido no Exemplo 4. Do ponto de vista da matemática avançada, o conceito de fração, e de uma forma geral o conceito de números racionais, é a definição de simplicidade. Cursos de álgebra de nível de terceiro ano da universidade tratam de números racionais e sua aritmética em menos de uma semana. Dado o notório fracasso no aprendizado de frações e números racionais, é natural perguntarmos por que não usamos simplesmente o que funciona na universidade para ensinar aos professores das séries iniciais. O motivo simples é que a abordagem universitária de frações requer que definamos uma fração como uma classe de equivalência de pares ordenados de inteiros. Não é somente pelo fato de que nossos alunos medianos de 5ª série não estão, em termos de maturidade matemática, em posição de trabalhar em um nível tão abstrato, mas porque, de forma mais pertinente, alunos de 5º ano, através de sua experiência, formam uma ideia de frações como partes de um inteiro, e esta concepção está muito distante dos pares ordenados de inteiros ou das relações de equivalência. Para facilitar o aprendizado, uma teoria de frações para alunos de 5º ano teria que levar em conta tais desenvolvimentos cognitivos.

Um curso sobre frações para professores, se for concebido para ser útil em sala de aula, não pode, portanto, adotar a abordagem abstrata e exigir que cada futuro professor pesquise por conta própria uma forma de levar este conhecimento abstrato para as salas de aula das escolas elementar e média. Esse tipo de pesquisa, não-trivial como é, deve ser deixado para matemáticos profissionais. Da mesma forma, um curso de matemática para professores das séries iniciais não deve ensinar frações da maneira usual, caótica e incompreensível (cf. Exemplo 4), e então esperar que os futuros professores transformem miraculosamente tal caos em lições significativas na sala de aula das escolas. Muito menos devemos esperar alcançar melhorias na educação matemática escolar encorajando nossos professores a ensinar visando a compreensão conceitual enquanto continuamos a alimentar estes mesmos professores com informações tão caóticas (cf. Wu, 2011a).

# Devemos ensinar nossos professores com base em materiais que tenham passado pelo processo de engenharia matemática.

Houve algumas tentativas de se construir uma ponte sobre o abismo existente entre a abordagem abstrata e o que é útil em uma sala de aula de 5° ano, mas elas não parecem ter tido sucesso. Por exemplo, um

livro didático para formação de professores define uma fração  $\frac{a}{b}$  como a

solução da equação bx = a, mas então segue em frente discutindo frações sem uma vez sequer fazer uso desta definição para argumentação lógica. Neste caso, porque a "definição" está separada do desenvolvimento lógico, ela deixa de ser uma definição no sentido matemático. Tal desenvolvimento não ajuda em nada nem a matemática nem a educação.

O que foi dito sobre o assunto de frações é, naturalmente, válido para a maioria dos outros tópicos da matemática escolar: os conceitos de números negativos, comprimento, área, volume, juntamente com todos os desenvolvimentos lógicos associados. O que o treinamento pedagógico profissional precisa, como dissemos anteriormente, é de cursos que sejam dedicados à matemática, mas que tenham passado por um cuidadoso processo de engenharia. Tais cursos, infelizmente, são escassos nos *campi* universitários até o momento, e pode-se somente torcer para que a situação mude para melhor no futuro próximo.

Atualmente, tem havido muito interesse no conteúdo de conhecimento dos professores de matemática, especialmente em seu efeito no desempenho dos alunos. Uma medida desse conteúdo de conhecimento é o número de cursos de matemática que os professores fizeram. Por exemplo, em Kennedy-Ahn-Choi se assume que "cursos em matemática representam conteúdo de conhecimento". Entretanto, um dos objetivos principais da presente discussão é chamar atenção para o fato de que, até que os departamentos de matemática e as faculdades de educação levem a engenharia matemática a sério, os cursos de matemática dificilmente serão muito relevantes para a habilidade dos professores de ensinar melhor nas salas de aula, e o número de cursos de matemática que os professores fizeram continuará sendo uma medida defeituosa de seu conteúdo de conhecimento para o ensino.

Mas para voltar à nossa tarefa original, descreveremos agora, do ponto de vista da engenharia matemática, o que precisa ser ensinado aos professores das séries iniciais, mais ou menos de acordo com a lista de tópicos básicos enunciada anteriormente. Ficará claro para todos que a descrição propriamente dita observa meticulosamente o requerimento (*ii*) acima a respeito do que os professores devem conhecer, isto é, está sempre próxima do currículo escolar comum.

(A) Números inteiros não-negativos. A base de toda a matemática são os números inteiros. Em particular, uma compreensão completa dos números inteiros não-negativos e suas operações aritméticas constitui o núcleo de conhecimento que os professores precisam para ensinar o currículo das séries iniciais. O que muitas vezes não é reconhecido é o fato de que uma compreensão adequada do conceito de valor posicional ("casas"), o conceito central nas discussões relacionadas a números inteiros. só é atingida com uma compreensão de como contar no sistema numérico hindu-arábico. Se os professores têm dificuldades em convencer as crianças de que, por exemplo, o 3 em 237 significa 30 e não 3, pode ser porque as crianças só o conhecem como uma entre uma imensidão de outras regras que elas têm que memorizar. Suponha agora que explicamos aos professores a ideia fundamental do sistema numérico hindu-árabe como a utilização de exatamente dez símbolos { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} para contar indefinidamente. Então, depois da primeira rodada de utilização destes símbolos para contar de 0 a 9, estaríamos empacados, a não ser que nos fosse permitido também usar estes dez símbolos em uma casa à esquerda, como a seguir. Nós "reciclamos" estes dez símbolos dez vezes, e a cada vez posicionamos sistematicamente um dos dez símbolos {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} à sua esquerda para ter controle da contagem contínua. Começamos, portanto, com

00 01 02 03 04 05 06 07 08 09

Então continuamos com a mesma linha de números mas com um 1 posicionado à esquerda no lugar do 0:

Continuamos com a mesma linha de números mais uma vez, mas com um 2 em vez de um 1 posicionado à esquerda:

Seguimos desta forma até chegar a

Neste ponto não podemos mais seguir contando a não ser que concordemos em permitir a colocação dos mesmos dez símbolos em outra casa à esquerda. Fazemos o mesmo, "reciclando" os 100 números {00, 01, 02, ..., 09, 10, 11, ....., 98, 99} e posicionando cada um dos dez símbolos {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} em sucessão no lugar à sua esquerda para ter controle da contagem contínua. Assim, depois de

continuamos com a mesma linha de 100 números mas com um 1 substituindo o 0 à esquerda:

Então substituímos o 1 na esquerda por um 2:

E assim por diante. Observamos aqui que, na utilização comum, omitimos a escrita dos zeros da esquerda, de forma que 001 é simplesmente 1, 091 é simplesmente 91 etc.

Para o professor, a vantagem de aprender como contar dessa forma é que ele agora percebe a aparição de cada dígito em cada casa à esquerda *como uma necessidade*, de maneira que não há mais dúvidas sobre o motivo pelo qual o 3 em 237 representa 30 e não 3. Isso acontece porque, no processo de contagem acima, não chegamos a 37 até que tenhamos reciclado os *10* 

símbolos  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  uma terceira vez, e então contemos mais 7. Com o processo de contagem claramente compreendido, o professor teria uma chance muito maior de explicar com clareza o que significam as casas. Mais que isso, ele pode também explicar, para dois números inteiros m e n, o que significa um ser maior do que o outro. Precisamente, m é menor que m, ou em símbolos, m < n, se m vem antes de n no processo de contagem. Torna-se então possível explicar por que um número de dois dígitos é menor que um número de três dígitos: um número de dois dígitos é, claramente, um número de três dígitos com um 0 à esquerda, então, contando da maneira acima, estes números de três dígitos com um 0 no começo vêm antes daqueles com 1 no começo, e estes vêm antes daqueles que começam por um 2 etc. Da mesma forma, podemos ver por que um número com 12 dígitos é menor que um com 14 dígitos etc. Sem saber como contar, o fato de que um número de 12 dígitos é menor que um número de 14 dígitos seria estritamente uma questão de acreditar nisso.

Um segundo tema importante a respeito dos números inteiros não-negativos serem parte do conhecimento básico dos professores elementares é o fato de que *todos os algoritmos padrão* (+, -, ×, ÷) *reduzem cálculos com números inteiros a cálculos de dígito único*. Esse fato já foi discutido no Exemplo 2. Um tema recorrente na matemática é, na verdade, sempre tentar desmembrar conceitos ou tarefas complexas em formas mais simples. O fato de que tal simplificação é possível no sistema numérico hindu-arábico é uma conquista fantástica. Esse tema crucial deve ser enfatizado no ensino dos algoritmos básicos, porque proporciona uma estrutura conceitual para o aprendizado desses algoritmos.

Uma falha comum no ensino de algoritmos básicos é a falta de ênfase nas *definições* das operações aritméticas (novamente, ver Exemplo 2). Por exemplo, o ensino do algoritmo de adição normalmente vai direto ao mecanismo coluna-por-coluna e à técnica de "carregar" sem se mencionar nada sobre o significado da adição de dois números inteiros. Com certeza, tal forma de ensino reduz o algoritmo a um truque, e nada mais. Se começarmos por definir explicitamente a adição como um processo de *contagem contínua*, de forma que 1373 + 2615 signifique

contar 2615 vezes além de 1373, então seria mais provável que os alunos reconhecessem que tal problema de adição não é uma tarefa fácil. Quando isso é compreendido, então o procedimento extremamente simples de obter a resposta fazendo quatro adições com dígito único, 3+5, 7+1, 3+6 e 1+2, se torna verdadeiramente impressionante. Todos os professores deveriam conseguir transmitir essa sensação para seus alunos, e isso não acontecerá se esse conhecimento não for ensinado aos professores.

Uma vez que os professores estejam seguros com esse conhecimento, eles então reconhecem que o pequeno trabalho adicional para lidar com o processo de "carregar" no algoritmo de adição é mesmo apenas isso, um pequeno trabalho adicional. O mesmo comentário se aplica para o algoritmo de subtração e a "troca".

Porque o **algoritmo de divisão longa** é o mais desafiador dos quatro algoritmos básicos, alguns comentários a respeito dele são válidos. Primeiramente, *o nome "algoritmo de divisão longa" pode ser enganoso, porque não trata de uma* divisão *per se, mas sobre divisão-com-resto*. Esta última não é uma "divisão" no sentido matemático usual. No contexto da matemática escolar com base no ano de 2011, a divisão-com-resto requer uma explicação cuidadosa, pela razão de que é ensinada de forma negligente em geral, a ponto de nem mesmo fornecer uma definição apropriada do conceito de *resto*. Mas, como se sabe, a divisão-com-resto é um tópico importante, pois forma a base do algoritmo euclidiano (ver página ref) e do algoritmo de divisão para polinômios.

Mas retornando ao algoritmo de divisão longa, trata-se de uma **iteração** de divisões-com-resto. Aqui está um exemplo para tornar claro este comentário.

Considere a divisão de 586 por 3. De início, deve-se deixar claro de que se trata o algoritmo de divisão longa: é um algoritmo para calcular, *dígito a dígito*, o quociente e o resto da divisão-com-resto de 586 por 3, que, quando expressado corretamente, diz que:

$$586 = (195 \times 3) + 1$$

A matemática escolar possui uma longa tradição de expressar este fato como  $586 \div 3 = 195 \ R1$ . Isto constitui um mau uso completo do sinal de

*igual*, o que contribui para muita confusão na pesquisa em educação e deve ser cuidadosamente evitado (ver Exemplo 5). Dito isso, a forma usual de se expressar o algoritmo de divisão longa é a seguinte:

Não é difícil notar que o algoritmo, neste caso especial, é completamente descrito pelas três seguintes divisões-com-resto, que serão referidas como a **descrição do procedimento** do algoritmo. Observe que o quociente pode ser lido, dígito a dígito, verticalmente a partir das primeiras entradas nos lados direitos e que o resto é o último número na última linha:

$$5 = (\boxed{1} \times 3) + 2$$
  
 $28 = (\boxed{9} \times 3) + 1$   
 $16 = (\boxed{5} \times 3) + \boxed{1}$ 

O mecanismo para ir de uma divisão-com-resto desta série para a próxima é o seguinte: a primeira divisão-com-resto pega o *dígito esquerdo* do dividendo (586) como seu próprio dividendo, e em geral o dividendo de cada divisão-com-resto subsequente é obtido pegando o resto da anterior, multiplicando por 10, e somando a ele o próximo dígito do dividendo original (586 neste caso). Torna-se agora um simples exercício fazer uso da descrição do procedimento juntamente com a forma expandida de 586 como  $586 = (5 \times 10^2) + (8 \times 10) + 6$  para *derivar* a conclusão desejada de que, na verdade,  $586 = (195 \times 3) + 1$ . Na medida em que essa explicação não depende de que números (neste caso, 586 e 3) estão envolvidos especificamente, ela proporciona uma compreensão geral sobre por que

o algoritmo de divisão longa sempre resulta na divisão-com-resto correta para quaisquer dois números inteiros. Os professores devem começar a entender esse belo algoritmo com tal profundidade para que o bom ensino possa prevalecer nas salas de aula.

A técnica básica de divisão-com-resto tem múltiplas implicações nas salas de aula das escolas. A primeira diz respeito às diversas regras de divisibilidade, tais como um número inteiro não-negativo n ser divisível por 3 se e somente se o número inteiro não-negativo obtido ao se somar os dígitos de n for divisível por 3. Note que todas essas regras de divisibilidade nada mais são que uma consequência do comportamento de uma potência de 10 quando ela é divisível por um número de dígito único (assim como 3). (A propósito, a regra de divisibilidade para 7 é tão complicada que não merece ser ensinada na formação pedagógica de professores da escola elementar). Essas regras de divisibilidade são usualmente ensinadas como truques sem explicação nas salas de aula do ensino básico, e já está mais que na hora de começar a providenciar tais explicações. Uma aplicação mais substancial da divisão-com-resto é o algoritmo euclidiano, que é o algoritmo para encontrar o mdc (máximo divisor comum) de dois números inteiros. (Não é necessário, mas fica mais fácil se o conceito de um inteiro já for conhecido dos alunos.) Naturalmente, os professores precisam de um conhecimento básico sobre primos e divisores entre números inteiros antes de abordar o algoritmo euclidiano. Esse algoritmo afirma que, através de uma iteração finita de divisões-com-resto, o mdc de dois números inteiros não-negativos a e b pode ser expresso como:

$$mdc(a, b) = ma + nb$$
 para alguns integrais  $m e n$ .

Por exemplo, o mdc de 884 e 374 é 34, e

$$34 = (3 \times 884) + ((-7) \times 374)$$

Em um sentido prático, professores das séries iniciais dão as boas-vindas à garantia por parte do algoritmo euclidiano de que há uma maneira eficiente de simplificar qualquer fração até seus menores termos. Mais

importante é o fato de que o algoritmo euclidiano conduz à prova do seguinte teorema fundamental:

se um número primo p divide o produto ab de números inteiros, e p não divide a, então p deve dividir b.

O fato de que toda fração é igual a uma fração única em seus menores termos é agora uma simples consequência, assim como o **Teorema Fundamental da Aritmética**. Ver a Parte 4 de Wu, 2011b, para uma discussão mais completa sobre esses tópicos. Professores das séries iniciais se beneficiariam do conhecimento do raciocínio lógico por trás desses fatos, aos quais eles provavelmente não dão muito valor e que usam com frequência em suas vidas profissionais.

Em anos recentes, o tema de estimativa foi enfatizado nas séries iniciais nos Estados Unidos, e com razão, mas o que encontrou seu caminho de volta para os livros didáticos neste tópico tende a representar de forma errônea a razão para essa ênfase. (Ver Exemplo 3.) Comecemos com uma enumeração de alguns pontos preocupantes. O primeiro é que é difícil obter uma descrição correta do arredondamento de números para a dezena ou centena mais próxima ou o milhar mais próximo etc. Em livros didáticos padrão, normalmente se ensina aos alunos a arredondar um número inteiro não-negativo n para a dezena mais próxima com o seguinte algoritmo: se o dígito da casa de unidade de  $n \notin \{0\}$  4, mude-o para 0 e mantenha os outros dígitos inalterados, mas se o dígito da casa da unidade é  $b \ge 5$ , então mude-o para 0 mas também aumente o dígito da casa da dezena em 1 e mantenha os outros dígitos inalterados. Isso é correto na maioria dos casos, mas colapsa completamente no caso de um número tal como 12996. Uma formulação correta para o arredondamento de um número inteiro não-negativo n para a dezena mais próxima é a seguinte:

Escreva n como  $N + \bar{n}$ , onde  $\bar{n}$  é o número de dígito único igual ao dígito da casa da unidade de n (e portanto N é o número inteiro obtido a partir de n substituindo

seu dígito da casa da unidade por 0). Então arredondar n para a dezena mais próxima resulta no número que é igual a N se  $\bar{n} < 5$ , e igual a N + 10 se  $n \ge 5$ .

Pode-se fornecer uma formulação análoga para o arredondamento para outras potências de 10. Um ponto mais fundamental é que a estimativa é ensinada como uma atividade mecânica, sem nenhuma reflexão feita sobre como convencer os alunos de que isto é algo que valha a pena aprender. Não é dito aos alunos por que eles devem estimar ocasionalmente (e.g., incertezas em uma medição), sob quais circunstâncias só uma resposta aproximada é o que faz sentido (e.g., imprecisão inerente ao conceito, tal como a distância da casa à escola, ou a temperatura do dia), ou sob quais circunstâncias uma estimativa se torna uma ajuda para se atingir precisão (e.g., o processo de executar o algoritmo de divisão longa). Uma preocupação ainda mais séria é que os alunos não são alertados para a necessidade de sempre procurar descobrir o erro que vem com cada estimativa. Nas séries até (aproximadamente) o 5º ano, entendese que somente o conceito de erro absoluto pode ser discutido, mas aproximadamente a partir do 6º ano, deve-se ensinar aos alunos a estimar de forma rotineira o erro percentual (ou erro relativo).

A formação de professores se beneficiaria se levasse essas armadilhas potenciais em conta e fornecesse aos professores o tipo de instrução que lhes permitiria evitá-las.

(B) Frações. Frações são números racionais não-negativos para esta discussão; compare a Parte 2 de Wu, 2011b. Trataremos de frações nesta seção, e de números racionais negativos na próxima.

Antes de iniciarmos uma discussão detalhada a respeito do conhecimento dos professores sobre frações, deve ser dito logo que o tipo de conhecimento discutido a seguir pode ser usado na sala de aula a partir do 4º ano sem necessidade de mudanças drásticas. Então, onde essa discussão deixa os professores das séries iniciais? Acreditamos que todos os professores das séries iniciais devem também adquirir tal conhecimento sobre frações. O motivo mais

óbvio é que os professores nunca podem ter certeza de que irão ensinar apenas nas séries iniciais para o resto de suas vidas. O motivo real, entretanto, é que aquilo que um professor ensina nas séries iniciais pode ser simples, mas ainda assim deve ser uma versão simplificada de uma matemática correta. Por exemplo, um professor familiarizado com o desenvolvimento lógico de frações reconheceria a futilidade de confiar exclusivamente em pedaços de pizza para ensinar frações. Esse professor estaria mais inclinado a introduzir a linha numérica tão cedo quanto possível. Se um professor sabe como frações podem ser desenvolvidas de uma forma que seja consistente com as características básicas da matemática, então ele estaria infinitamente mais bem equipado para fornecer aos alunos das séries iniciais a base matemática que lhes será necessária nas séries seguintes.

Tradicionalmente, o fracasso dos alunos em aprender frações é explicado pela desconexão em sua compreensão da complexidade conceitual de frações (e.g., Behr-Lesh-Post-Silver, 1983; Bezuk-Bieck, 1993). Nossos professores são, portanto, encorajados a desenvolver um forte senso numérico sobre frações e a desenvolver uma habilidade para pensar em frações "de outras formas" além de "parte-todo". Um tema recorrente na literatura sobre educação é que, para alcançar flexibilidade para trabalhar com números racionais, deve-se adquirir uma sólida compreensão das diferentes representações de frações, decimais e percentagens. Outro tema, igualmente recorrente, é que uma compreensão profunda dos números racionais deve ser desenvolvida através de experiências com uma variedade de modelos, tais como faixas de fração, linhas numéricas, malhas  $10 \times 10$  e modelos de área.

Há duas coisas fundamentalmente erradas com essa visão de frações. A primeira é que, se não se diz aos alunos o que é uma fração, qualquer discussão sobre suas "diferentes representações" seria a mesma coisa que falar sobre manchas de pele num unicórnio. É atraente,

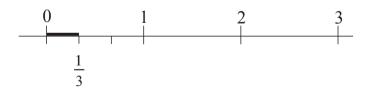
mas mesmo assim é educacionalmente deficiente (Ver Exemplo 4). A segunda coisa errada é que, até o momento, dificilmente existiu uma apresentação *matematicamente correta* sobre o tema de frações nas salas de aula nas escolas ou na formação dos professores. Nesse contexto, falar sobre desenvolver uma "compreensão profunda" de frações através de experiências do tipo "mão na massa" é portanto admitir que uma apresentação incoerente sobre frações é uma propriedade da natureza e devemos nos acomodar com métodos *ultra*matemáticos para o aprendizado de frações. Embora tal ponto de vista seja consistente com um que é comumente sustentado na pesquisa em educação matemática (cf. artigos do Projeto de Números Racionais (em inglês, Rational Number Project), e.g., Behr-Harel-Post-Lesh, 1992; também Kieren, 1976; e Vergnaud, 1983), *não constitui uma forma matematicamente aceitável de se ensinar matemática*.

A compreensão dos professores sobre frações como um conceito matemático não vai melhorar até que possamos proporcionar-lhes uma estrutura matemática na qual todas essas "representações" emergem como consequências lógicas de uma concepção (definição) de fração claramente enunciada. (Compare a discussão sobre coerência nos Exemplos 2 e 4.) Desejamos que os professores percebam que as frações constituem um tema que é permeado com as cinco propriedades características da matemática acima mencionadas. Como a tradição de ensinar frações por repetição é tão arraigada, a menos que possamos fazer com que nossos professores comprem a ideia de que o tema é lógico, e não mágico, há pouca esperança de que seus alunos considerem frações um tema que pode ser aprendido.

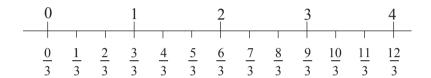
Precisamos abordar as frações a partir de um ponto de vista que seja consistente com os requisitos (*i*) e (*ii*) acima. Em outras palavras, precisamos de uma abordagem que seja enraizada na engenharia matemática. Tal abordagem está disponível desde pelo menos 1998 (ver Wu, 2011b; para uma similar, mas ligeiramente diferente, ver Jensen, 2003). Independentemente de quando os livros didáticos escolares

começarão a ensinar frações como parte da matemática (em vez de como parte ciência experimental, parte decreto real), há uma necessidade urgente de que nossos professores aprendam uma apresentação matematicamente válida de frações.

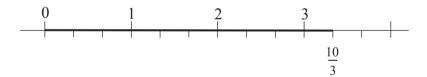
Tal apresentação começa com a definição de frações como pontos em uma linha numérica, construída de uma maneira específica, e, nesta base, prova **todas** as propriedades que esperamos das frações com explicações matemáticas. Aqui não é o lugar de expor um tratamento detalhado e nem mesmo um resumo completo de tal apresentação. Podemos tentar, entretanto, dar uma ideia do que esta apresentação tenta alcançar. Por exemplo, vejamos o que é uma definição razoável de frações com denominador igual a 3. Primeiramente estabelecemos algumas definições. Se a e b são dois pontos na linha numérica, com a à esquerda de b, denominamos [a,b] o segmento de a até b. Os pontos a e b são chamados de **pontos de extremidade** de [a,b]. O caso especial do segmento [0,1] ocupa uma posição distinta no estudo de frações; ele é chamado de segmento unitário e seu comprimento é, intuitivamente, nosso "inteiro". O ponto 1 é chamado de unidade. Como a fração  $\frac{1}{3}$  é um terço do inteiro, podemos ver na figura da linha numérica abaixo que o comprimento de qualquer um dos três segmentos menores de igual comprimento entre 0 e 1 se qualifica como  $\frac{1}{3}$ . Entretanto, o ponto de extremidade da direita do segmento mais grosso é suficiente, de um ponto de vista intuitivo, para indicar o comprimento deste segmento mais grosso, de forma que este ponto de extremidade da direita será escolhido como representativo de  $\frac{1}{2}$ .



Se dividirmos, não somente [0,1], mas todos os segmentos entre dois números inteiros - [0,1], [1,2], [2,3], [3,4] etc. - em três partes iguais, então estes pontos de divisão juntamente com os números inteiros formam uma sequência infinita de pontos equidistantes, a ser chamada de **sequência de terços**. O ponto nesta sequência à direita de  $\frac{1}{3}$  será chamado de  $\frac{2}{3}$ , o seguinte de  $\frac{3}{3}$  etc.



Observe que cada ponto nesta sequência fornece o comprimento do segmento de 0 até o ponto em questão. Por exemplo,  $\frac{10}{3}$  é o comprimento do segmento  $\left[0,\frac{10}{3}\right]$ , assim como é 10 vezes o comprimento de  $\left[0,\frac{1}{3}\right]$  (é só contar!).



Acabamos de utilizar o raciocínio intuitivo para localizar as frações com denominador igual a 3 na linha numérica.

Assim, em uma introdução matemática formal às frações, criaríamos primeiramente a sequência de terços exatamente da mesma maneira, e então *definiríamos* as frações com denominador igual a 3 como sendo exatamente estes pontos. Em outras palavras, no que diz

respeito à matemática, a fração  $\frac{10}{3}$  (por exemplo) é somente o décimo ponto nesta sequência à direita do 0, nada mais, nada menos. Se desejamos dizer algo sobre esta fração, devemos começar com o fato de que ela é o décimo ponto na sequência de terços.

De maneira equivalente, as frações com denominador igual a n são, por definição, os pontos na seguinte sequência: dividimos cada um dos segmentos  $[0, 1], [1, 2], [2, 3] \dots$ , em n partes iguais, e então estes pontos de divisão, juntamente com os números inteiros, formam a sequência infinita de pontos equidistantes procurada. Esta sequência é chamada de **sequência de n avos**. A fração  $\frac{m}{n}$  é então o m-ésimo ponto à direita de 0 nesta sequência infinita.

Podemos apontar aqui uma vantagem imediata de se ter uma definição tão precisa de frações. Dadas duas frações A e B, definimos que A < B, e dizemos que A é menos que (ou menor que) B se A está à esquerda de B na linha numérica. A razão de isso ser significativo é que, na apresentação tradicional de frações, não existe uma definição sobre o que quer dizer uma fração ser menor que outra. Em vez disso, diz-se aos alunos que façam alguma coisa antes (e.g., obtenham o denominador comum a ambas as frações) e então decidam, depois disto feito, se uma é menor que a outra.

Daqui em diante, será assumido automaticamente que o número inteiro n em um símbolo de fração  $\underline{m}$  é diferente de zero.

Uma classe especial de frações é aquela na qual os denominadores são todos potências positivas de 10, e.g.,

$$\frac{1489}{10^2}$$
,  $\frac{24}{10^5}$ ,  $\frac{58900}{10^4}$ 

Estas são denominadas **frações decimais**, mas são usualmente abreviadas para

respectivamente. A base lógica da notação é clara: o número de dígitos à direita do assim chamado **ponto decimal** controla a potência de 10 nos respectivos denominadores, 2 em 14,89, 5 em 0,0024, e 4 em 5.8900. Nessa notação, esses números são chamados de decimais **finitos**. Em contexto, normalmente omitimos qualquer menção a "finitos" e nos

referimos a eles apenas como "decimais" se não há perigo de confusão. Seria conveniente pensar que 5.8900 é o mesmo que 5.89, como se ensina a todo aluno nas escolas desde o começo, mas já concordamos

por definição que 5.8900 é  $\frac{58900}{10^4}$ , ao passo que 5.89 é (novamente por definição)  $\frac{589}{10^2}$ . Como sabemos que eles são iguais?

$$\frac{58900}{10^4} = \frac{589}{10^2}$$

Devemos fornecer uma prova! É mais esclarecedor primeiro provar um fato geral que é fundamental para o tema de frações. E este é o teorema conhecido na matemática escolar como "frações equivalentes". Primeiramente, definimos que duas frações são **iguais** se elas são o mesmo ponto na linha numérica.

O **Teorema das Frações Equivalentes** é a afirmação de que *dadas* 

duas frações  $\frac{m}{n}$  e  $\frac{k}{l}$ , se existe um número inteiro não-negativo j tal que k=jm e l=jn, então  $\frac{m}{n}=\frac{k}{l}$ .

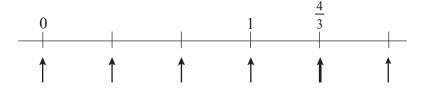
É comum enunciar este teorema da seguinte forma: para todos os números inteiros não-negativos j, m e n (tais que  $n \neq 0$  e j  $\neq 0$ ),

$$\frac{m}{n} = \frac{jm}{jn}$$

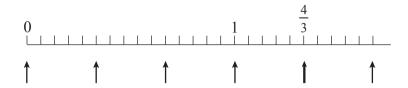
Este fato pode ser provado de maneira simples com a definição de frações disponível. Mostramos aqui o raciocínio para o caso especial

$$\frac{4}{3} - \frac{5 \times 4}{5 \times 3}$$

mas este raciocínio se mostrará válido em geral. Primeiro localizamos  $\frac{4}{3}$  na linha numérica:



Dividimos cada um dos segmentos entre pontos consecutivos na sequência de terços em 5 partes iguais. Daí então cada um dos segmentos [0, 1], [1, 2], [2, 3], ... está agora dividido em 15 partes iguais e, de maneira óbvia, é obtida então a **sequência de 15 avos** na linha numérica:



O ponto  $\frac{4}{3}$ , sendo o quarto ponto na sequência de terços, é agora o  $20^{\circ}$  ponto na sequência de 15 avos. Este ponto é, por definição, a fração  $\frac{20}{15}$ , i.e.,  $\frac{5\times 4}{5\times 3}$ . Portanto  $\frac{4}{3}=\frac{5\times 4}{5\times 3}$ .

Observe que, sem uma definição precisa de fração, seria difícil entender o sentido da afirmação sobre frações equivalentes para *j, m* e *n arbitrários*.

A primeira aplicação do teorema de frações equivalentes é levar a uma conclusão definitiva para a discussão a respeito do decimal 5.8900. Lembre que tínhamos, por definição,

$$\frac{58900}{10^4} = 5.8900$$

Mostramos agora que 5.8900 = 5.89 e, de forma mais geral, *pode-se* adicionar ou remover zeros da extremidade direita do ponto decimal sem mudar o decimal. De fato,

$$5.8900 = \frac{58900}{10^4} = \frac{589 \times 10^2}{10^2 \times 10^2} = \frac{589}{10^2} = 5,89$$

onde a igualdade do meio faz uso do conceito de frações equivalentes. O raciocínio é claramente válido no contexto geral, e.g.,

$$12,7 = \frac{127}{10} = \frac{12710^4}{1010^4} = \frac{1270000}{10^5} = 12,7000$$

Uma segunda aplicação é no **algoritmo de multiplicação cruzada**, no sentido em que duas frações

$$\frac{m}{n}$$
 e  $\frac{k}{l}$  são iguais se e somente se  $ml = kn$ .

Isso não somente é uma prática muito útil, como também é conceitualmente importante porque fornece a correta afirmação recíproca ao Teorema de Frações Equivalentes. Sua prova é simples e direta, uma vez que observamos que  $\frac{m}{n}$  e  $\frac{k}{l}$  podem ser reescritos como

$$\frac{lm}{ln}$$
 e  $\frac{nk}{nl}$ 

É comumente dito que uma compreensão conceitual de frações deve incluir o fato de que uma fração é ao mesmo tempo uma partede-um-todo e uma divisão. Apressamo-nos em apontar aqui que esta afirmação não tem significado enquanto afirmação matemática. De fato, é esperado que se compreenda, por exemplo, que a fração  $\frac{5}{7}$  é não somente "5 partes quando o todo é dividido em 7 partes iguais", mas também "5 dividido por 7". O primeiro aspecto questionável dessa declaração é que se  $\frac{5}{7}$  de fato significa "5 dividido por 7", então deve-se ser capaz de dar uma justificativa. Em outras palavras, há um teorema a ser provado, embora esta prova não seja dada nunca. Um segundo aspecto questionável é que, entre os números inteiros não-negativos, não existe divisão tal como "5 ÷ 7", somente divisões na forma 12 ÷ 4,  $25 \div 5$ ,  $48 \div 6$ , ou, em geral,  $a \div b$  quando  $a \notin um$  múltiplo de b. Portanto, para dar sentido a  $\frac{m}{n}$  como " $m \div n$ ", precisamos em primeiro lugar definir precisamente para quaisquer dois números inteiros nãonegativos m, n ( $n \neq 0$ ), que

 $m \div n$  é o comprimento de uma parte quando um segmento de comprimento m é particionado<sup>3</sup> em n partes iguais.

Agora ao menos estamos em posição de fazer uma asserção que seja matematicamente significativa, a saber, declaramos a *igualdade de dois* 

números, 
$$\frac{m}{n}$$
 e  $m \neq n$ :<sup>4</sup>

$$\frac{m}{n} = m \div n$$

Este é o significado correto da assim chamada **interpretação de fração como divisão**. E, é claro, ainda precisamos fornecer uma prova! A vantagem de ter tido todo esse trabalho para tornar evidente essa afirmação é que agora vemos com mais clareza como prová-la.

Para dividir [0,m] em n partes iguais, expressamos  $m = \frac{m}{1}$  como

$$\frac{nm}{n}$$

usando frações equivalentes. Isto é, nm cópias de  $\frac{1}{n}$ , o que equivale a n cópias de  $\frac{m}{n}$ . Então uma destas n partes iguais é simplesmente  $\frac{m}{n}$ .

Notamos aqui mais uma vez que uma explicação tão precisa somente pode ser dada porque temos uma definição igualmente precisa de fração.

A formação inicial de professores do ensino básico não pode se dar ao luxo de evitar uma discussão sobre se um professor pode insistir

<sup>3</sup> Para evitar o aparecimento da possivelmente confusa palavra "dividir" nesta conjuntura, utilizamos intencionalmente, em seu lugar, a palavra "partição".

<sup>4</sup> Note o quanto somos cuidadosos na utilização do sinal de igual! Compare com o Exemplo 5 na Parte I.

em **sempre reduzir uma fração a seus menores termos**. Implícita nessa postura está o enunciado de que

toda fração é igual a uma fração única (uma e somente uma fração) nos termos mais baixo

Antes de mais nada, precisamos reconhecer o fato de que é bastante incomum provar este enunciado. É aí que entra o algoritmo euclidiano. Embora uma prova deva ser dada, ela não pode ser dada no 5º ano ou mesmo no 6º ano na maioria das escolas, devido à sofisticação matemática envolvida. Além disso, os professores também devem saber que uma fração tal como  $\frac{12}{9}$  é tão boa quanto  $\frac{4}{3}$ , de forma que a insistência para que se use  $\frac{4}{3}$  e não  $\frac{12}{9}$  deve ser reconhecida como uma preferência e não uma necessidade matemática. Finalmente, às vezes não é imediatamente óbvio se uma fração está em seus termos mais baixos ou não, e.g.,  $\frac{68}{51}$ . (Não está.) Por todas essas razões, uma atitude mais flexível em relação a frações não-reduzidas levaria consequentemente a uma melhor educação matemática para os alunos.

Normalmente se passaria agora às definições de adição e subtração de frações, à multiplicação de frações e à divisão de frações. Aqui, queremos que os professores apreciem a coerência da matemática exibindo, para isso, a similaridade fundamental entre as operações aritméticas com frações e as com números inteiros. Ver Parte 2 de Wu, 2011b. Os professores precisam perceber que frações não são "outro tipo de número". Para definir a adição de duas frações, consideramos primeiramente como adicionar números inteiros não-negativos quando estes são vistos como pontos em uma linha numérica. Tome, por exemplo, a adição de 4 e 7. Em termos da linha numérica, isto é somente o comprimento total de dois segmentos unidos em suas extremidades, um com comprimento 4 e o outro com comprimento 7, o que resulta claramente em 11, como mostrado.



Denominamos este processo **concatenação** de dois segmentos. Através do mesmo processo, definimos, dadas as frações  $\frac{k}{l}$  e  $\frac{m}{n}$ , a sua **soma**  $\frac{k}{l} + \frac{m}{n}$  como

$$\frac{k}{l} + \frac{m}{n} = o \quad comprimento \quad de \quad dois \quad segmentos$$

$$concatenados, \quad um \quad de \quad comprimento \quad \frac{k}{l},$$

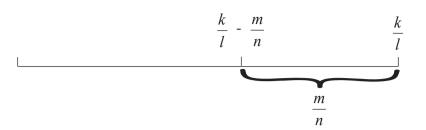
$$seguido \quad de \quad um \quad de \quad comprimento \quad \frac{m}{n}.$$

$$\frac{\frac{k}{l}}{l} \qquad \frac{m}{n}$$

$$\leftarrow \qquad \frac{k}{l} + \frac{m}{n} \qquad \rightarrow$$

Prova-se então a **fórmula de adição** para duas frações quaisquer  $\frac{k}{l}$  e  $\frac{m}{n}$ :  $\frac{k}{l} + \frac{m}{n} = \frac{kn + lm}{ln}$ 

Para que a subtração  $\frac{k}{l} - \frac{m}{n}$  faça sentido, primeiro temos que nos assegurar de que  $\frac{k}{l} > \frac{m}{n}$ . Uma vez que isso foi feito, a subtração é então definida como o comprimento do segmento remanescente quando um segmento de comprimento  $\frac{m}{n}$  é retirado de uma das extremidades de um segmento de comprimento  $\frac{k}{l}$ .



A seguir, dadas duas frações A e B, definiremos A x B e  $\frac{A}{B}$ . Primeiramente definimos  $\frac{k}{l}$  **de um número** x como sendo o número que é o comprimento da concatenação de k partes quando o segmento [0,x] de comprimento x é particionado em l partes de comprimentos iguais. Então, por definição, o produto  $\frac{k}{l} \times \frac{m}{n}$  é  $\frac{k}{l}$  de  $\frac{m}{n}$ . Com

base nesta definição, prova-se a conhecida **fórmula do produto** para k m

quaisquer duas frações  $\frac{k}{l}$  e  $\frac{m}{n}$ :

$$\frac{k}{l} \times \frac{m}{n} = \frac{km}{ln}$$

Observe que quando l=1,  $\frac{k}{l}=4$ , de forma que (se m é um número inteiro não-negativo) "k de m" é, de acordo com a definição acima, exatamente o comprimento de k cópias de [0,m], i.e.,  $k\times m$  é km, que é a definição de multiplicação entre números inteiros. Deve-se mencionar que a fórmula do produto leva a um segundo, e igualmente importante, significado de multiplicação de frações:

A área de um retângulo com lados de comprimentos  $\frac{k}{l}$  e  $\frac{m}{n}$  é igual a

$$\frac{k}{l} \times \frac{m}{n}$$

Isso pode ser provado tomando-se a unidade de uma linha numérica como a área de um quadrado unitário, e examinando-se diretamente o que significa tomar  $\frac{k}{l}$  cópias de  $\frac{m}{n}$ , e observa-se então que isto é a área de um retângulo com lados de comprimentos  $\frac{k}{l}$  e  $\frac{m}{n}$ .

Finalmente, dadas as frações A e B ( $B \neq 0$ ), a **divisão** ou **quociente**  $\frac{A}{B}$  é por definição a fração C tal que A= CB. Se isto não soa familiar, considere uma divisão entre números inteiros não-negativos, como  $\frac{36}{9}$ .

Nós dizemos às crianças que  $\frac{36}{9}$  = 4 porque 36 = 4. Se substituirmos agora 36 por A, 9 por B e 4 por C, teremos então exatamente a definição de  $\frac{A}{B}$ . (Devemos acrescentar que, na definição precedente de  $\frac{A}{B}$ , a existência de uma única fração C que satisfaz A = CB deve ser provada.) A regra clássica de inverter-e-multiplicar se torna agora um teorema.

Uma vez que o conceito de divisão foi aprendido, podemos introduzir o importante conceito de **fração complexa**, i.e., a divisão  $\frac{A}{B}$ , onde A e B são frações (B  $\neq$  0). Mas, se uma fração complexa é simplesmente uma fração, por que distingui-la das outras na discussão? A razão pode ser mais facilmente percebida se considerarmos um problema simples tal como o seguinte.

Divida 88 em duas partes 
$$A$$
 e  $B$  de forma que  $\frac{A}{B} = \frac{2/3}{3/4}$ .

Vejamos como isso pode ser feito na maneira usual. Como A + B = 88, vemos que B = 88 - A. Substituindo isso na equação original, temos

$$\frac{A}{88 - A} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$$

A equação (1) sugere a utilização do algoritmo de multiplicação cruzada. Assim, temos:

$$\frac{3}{4}A = \frac{2}{3}(88 - A)$$

$$\frac{3}{4}A = \frac{176}{3} - \frac{2}{3}A$$

$$\frac{3}{4}A + \frac{2}{3}A = \frac{176}{3}$$

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right)A = \frac{176}{3}$$

$$\frac{17}{12}A = \frac{176}{3}$$

Então, 
$$A = 41\frac{7}{17}$$
, de maneira que  $B = 46\frac{10}{17}$ .

O que nos interessa é a passagem da equação (1) para a equação (2). Conforme mencionado acima, isso poderia parecer uma aplicação comum do algoritmo de multiplicação cruzada, mas um exame mais detalhado revelaria que este algoritmo é, até agora, aplicável somente a frações, i.e., m, n, k, l, no exemplo já mencionado, devem ser números inteiros não-negativos, enquanto os números na equação (1), i.e., A, 88 -

$$A, \frac{2}{3}$$
, e  $\frac{3}{4}$ , são todos frações. De forma mais sucinta, ambos os lados da

equação (1) são *frações complexas*. Para tornar válida a solução anterior, devemos provar a extensão do algoritmo de multiplicação cruzada de frações para frações complexas. Felizmente a validade de tal extensão vale não só para o algoritmo de multiplicação cruzada, mas também

para todas as operações aritméticas básicas, e as provas são rotineiras. Portanto, podemos somar, multiplicar e dividir frações complexas como se elas fossem frações ordinárias. Para ilustrar isso, considere a soma de duas frações complexas tais como

$$\frac{2.8}{4/5} + \frac{12/7}{2.5}$$

Sabemos como fazer a soma: expressar cada fração complexa como uma fração, através da regra de inverter-e-multiplicar,

$$\frac{2.8}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{28}{10}}{\frac{4}{5}} = \frac{28 \times 5}{10 \times 4} = \frac{140}{40}$$

e, de forma similar,

$$\frac{12/7}{2.5} = \frac{120}{175}$$

Então o problema de adição acima se torna um problema rotineiro:

$$\frac{2.8 + \frac{12}{7}}{\frac{4}{5}} = \frac{140}{40} + \frac{120}{175} = \frac{7}{2} + \frac{24}{35} = \frac{293}{70}$$

Entretanto, ao tratar as frações complexas como frações ordinárias e somá-las utilizando a *fórmula da adição*, chegamos de forma mais direta à mesma resposta:

$$\frac{2.8}{\frac{4}{5}} + \frac{12}{2.5} = \frac{(2.8 \times 2.5) + (\frac{4}{5} \times 12/7)}{\frac{4}{5} \times 2.5} = \frac{7 + \frac{48}{35}}{2} = \frac{7}{2} + \frac{24}{35} = \frac{293}{70}$$

Mas o verdadeiro motivo é que, quando tratarmos da manipulação de expressões racionais em álgebra, seremos *forçados* a utilizar a segunda estratégia e não teremos mais a escolha.

Os livros didáticos escolares e a literatura em educação pressupõem

que a extensão das operações aritméticas de frações a frações complexas é correta e fazem uso dela sem explicação alguma. Eles não se incomodam em apontar que tal extensão é necessária, e muito menos que é correta. É uma má política para a matemática escolar ser tão arrogante a respeito dessa generalização - de frações a frações complexas - e devemos ao menos fazer com que nossos professores entendam por que essa é uma má política. Por um lado, os alunos devem aprender a *não* ultrapassar os limites do que sabem. Se desejam alegar mais do que aquilo que sabem, devem estar imediatamente cientes de que precisam prová-lo. Neste caso, é uma questão de sorte que a extrapolação de frações para frações complexas não cause nenhum problema. Não se pode, entretanto, esperar que tal sorte persista em todos os casos. Por exemplo, entre as frações, é verdade que para qualquer fração A, o fato de que  $B \ge C$  implica que AB  $\geq$  AC. Alunos que adquiriram o hábito de alegar mais do que aquilo que sabem, assumiriam, quando se deparam com números racionais (i.e., frações positivas e negativas, ver item (C), Números Racionais), que para quaisquer números racionais A, B, C,  $B \ge C$  também implica que  $AB \ge AC$ . Isso seria um erro, porque, embora seja verdade que  $3 \ge 2$ , é falso dizer que  $(-4)3 \ge (-4)2$ , pois (-4)3 = -12, que é menos que (-4)2 = -8. Se não desejamos que os alunos recaiam nesse hábito ruim, então somos obrigados a nos assegurar de que nossos professores não formem eles mesmos tais hábitos em primeiro lugar.

Frações complexas são críticas para o estudo de frações e devem ser especialmente consideradas e ensinadas sistematicamente aos professores. Para demonstrar sua importância, introduzamos aqui os conceitos de percentagens, razões e taxas em geral.

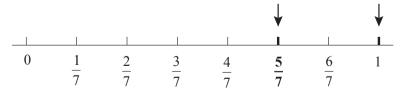
Uma **percentagem** é uma fração complexa cujo denominador é 100.

Por tradição, uma percentagem  $\frac{N}{100}$ , onde N é uma fração, é comumente escrita como N%. Ao interpretar  $\frac{N}{100}$  como uma fração ordinária, vemos

que a afirmação usual de que N% **de um número**  $\frac{m}{n}$  é (pela definição de multiplicação de frações) exatamente  $N\% \times \frac{m}{n}$ . Com esta definição precisa de percentagem disponível, todas as questões a respeito de percentagem podem ser rotineiramente calculadas. Ver Exemplo 4.

A maneira comum de definir "percentagem" como "algo que é parte de uma centena" causa sérios danos ao aprendizado dos alunos. É impossível utilizar um conceito tão vago para fazer cálculos em questões comuns sobre percentagem.

Quando A e B são números inteiros não-negativos, desejamos mostrar que esta definição da razão 5:7 tem o mesmo significado intuitivo de "5 partes em 7". De fato, 5:7 é por definição a fração  $\frac{5}{7}$  que, pela definição de uma fração, é o  $5^{\circ}$  ponto de divisão quando o segmento [0,1] é dividido em 7 partes iguais:



Vemos, portanto, que 5 : 7 (i.e.,  $\frac{5}{7}$ ) equivale a 5 partes (uma parte sendo  $\frac{1}{7}$ ) comparadas com 7 partes.

A importância dessa definição da razão de uma fração A para uma fração B é que, ao estabelecer primeiro o significado de uma fração como um ponto na linha numérica, mostramos que quando A e B são ambos números inteiros não-negativos, o significado de A:B é exatamente a

fração  $\frac{A}{B}$ . Como se sabe bem, uma das definições tradicionais de uma fração  $\frac{A}{B}$  (A, B são números inteiros não-negativos,  $B \neq 0$ ) é que ela

é a razão de *A* para *B*. O que fizemos foi, portanto, tornar mais clara a relação entre esses dois conceitos ao virar a mesa: primeiro definimos frações e então definimos razões em termos de frações.

Na matemática escolar, a aplicação mais substancial do conceito de divisão é em problemas relacionados a *taxas*, ou, mais precisamente, *taxas constantes*. A definição precisa do conceito geral de "taxa" requer um conhecimento de cálculo e portanto não faz parte de uma matemática adequada para as escolas. A utilização da terminologia "taxa" na educação básica deve ser então entendida como uma figura de linguagem. O que é importante é saber o significado preciso de "taxa constante" em situações específicas, e algumas das mais comuns serão descritas agora.

A mais intuitiva em meio aos diversos tipos de taxa é a *velocidade*. Fixemos uma unidade para distância, digamos milhas, e uma unidade de tempo, digamos horas. Um movimento a **velocidade constante**  $\nu$  ( $\nu$  sendo um número fixo) se a distância percorrida, d milhas, do instante 0 a um instante t qualquer é

$$d = vt$$

Analogamente, em termos do conceito de divisão, um movimento tem velocidade constante se existe um número fixo v, tal que para *qualquer* número positivo t, a distância de d milhas percorrida em *qualquer* intervalo de tempo de t horas satisfaz

$$\frac{d}{t} = v$$

Desta forma, pode-se observar que a unidade correta associada a v é **milhas por hora (mph)**, e v é denominada a **velocidade** do movimento de velocidade constante. Repare que  $\frac{d}{t}$  é uma fração complexa; a partir deste fato somente pode-se inferir que a maioria dos cálculos em

problemas de velocidade envolverão a aritmética de frações complexas.

O que vale a pena mencionar sobre a equação anterior é o fato de que estamos dividindo dois números, d e t, ostensivamente de diferentes linhas numéricas. Em maior detalhe, d é um número na linha numérica em que 1 é a unidade de comprimento escolhida (centímetro, metro etc.), ao passo que t está na linha numérica cuja unidade 1 é a unidade de tempo escolhida (segundo, minuto etc.). O que fizemos, ao menos implicitamente, foi identificar as duas unidades de comprimento e tempo, de forma que d e t agora são pontos na mesma linha numérica. Se isso soa estranho, só pode ser porque é raramente apontado de forma explícita, embora seja feito com frequência. Por exemplo, suponha que um retângulo tem área de 48 centímetros quadrados e um lado tenha

8 centímetros. O comprimento do outro lado é então de  $\frac{48}{8} = 6$ 

centímetros. Aqui a divisão faz sentido somente porque identificamos a unidade centímetro quadrado com a unidade de comprimento, um centímetro. Em todo caso, é a necessidade, em geral, de identificar duas linhas numéricas em suas definições que distingue *taxa* de *razão*.

Na linguagem da matemática escolar, velocidade é a "taxa" na qual o trabalho de ir de um lugar até outro é feito. Outros problemas comuns de "taxa" constante que merecem ser mencionados são os seguintes. Um deles é o de pintar (o exterior de) uma casa. A taxa constante neste caso seria o número de metros quadrados pintados por dia ou por hora. O segundo é o de aparar um gramado. A taxa constante em questão seria o número de metros quadrados cortados por hora ou por minuto. Um terceiro é o trabalho feito pela água escoando de uma torneira, e a taxa constante seria o número de litros de água saindo por minuto ou por segundo. Em cada caso, o conceito de taxa constante pode ser definido de uma maneira que seja idêntica ao caso da velocidade constante. Por exemplo, uma taxa constante de corte de taxa significaria: existe um valor taxa constante (com unidade igual a metros quadrados por hora) tal que se taxa é a área total cortada após taxa taxa constante.

$$A = tT$$

 $n\tilde{a}o$  importa qual o valor de T. De forma equivalente, o corte de grama possui taxa constante se existe um número fixo r tal que o número de metros quadrados A aparados em T horas satisfaz

$$\frac{A}{T} = \mathbf{r}$$

para qualquer valor de T.

Sem saber os significados precisos de divisão e multiplicação entre frações, seria impossível detectar o fato de que todos esses problemas de taxa constante são problemas idênticos. Por exemplo, assumindo taxa constante em cada uma das situações, o problema de "se eu caminhar 287 metros em 9 minutos, quantos metros eu caminho em 7 minutos?" é idêntico a "se eu aparar 287 metros quadrados de grama em 9 minutos, quantos metros quadrados eu apararia em 7 minutos?". Esse é um argumento para enfatizar a importância das definições.

Finalmente, abordamos o tópico de converter uma fração em um decimal finito ou infinito. Tratamos deste tópico por último em virtude de sua sutileza enganadora. Considere primeiramente o caso daquelas frações que são iguais a um decimal finito. Os professores devem aprender como provar o teorema que diz que uma fração reduzida é igual a um decimal finito se e somente se seu denominador possui apenas 2 ou 5 como fatores primos. Esta prova necessita do Teorema Fundamental da Aritmética. Provemos, por exemplo, que

$$\frac{3}{8} = 0,375$$

Por si só, esta igualdade não tem nada de extraordinário. De fato, a definição de  $0,375 ext{ } ext$ 

$$0,375 = \frac{375}{1000} = \frac{3 \times 125}{8 \times 125} = \frac{3}{8}$$

Entretanto, o algoritmo que converte uma fração em decimal afirma que se obtém o decimal 0,375 a partir da fração  $\frac{3}{8}$  fazendo a divisão longa de  $3\times10^5$  (ou  $3\times10^n$  para qualquer n grande) por 8 e então posicionando o ponto decimal no quociente de alguma forma prescrita. Assim, o que está em pauta aqui não é tanto o fato de que dois números  $\frac{3}{8}$  e 0,375 são iguais<sup>5</sup>, mas sim que o método de divisão longa de 30000 por 8 resultaria na resposta correta. Isso pode ser feito de forma simples, como a seguir:

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{10^5} \times \frac{3 \times 10^5}{8}$$

Considere a divisão-com-resto de  $3\times 10^5$  por 8: obtemos  $3\times 10^5$  =  $(37500\times 8)+0$ . Lembre que este cálculo é feito através da utilização do algoritmo de divisão longa. Portanto

$$\frac{3\times10^5}{8} = \frac{(37500\times8)+0}{8} = 37500$$

Assim, usando a definição de decimal, temos:

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{10^5} \times 37500 = \frac{37500}{10^5} = 0,37500 = 0,375$$

<sup>5</sup> Mas note a importância, neste contexto, de se ter definições precisas, tanto de ¾, uma fração, quanto de 0,375, um decimal, como números. Qualquer coisa menos que isso (tal como conhecer uma fração somente como um pedaço de pizza) e esta igualdade sequer faria sentido.

Claramente, obteríamos a mesma resposta se 10<sup>5</sup> fosse substituído por 10<sup>3</sup>, ou qualquer potência de 10 maior que 3. Em geral, nós simplesmente tentamos multiplicar o numerador e o denominador da fração em questão por uma potência alta de 10, onde "alta" significa "alta o suficiente para se ver a terminação do decimal com zeros". O mesmo raciocínio é aplicável a todos os outros casos.

Em geral, uma fração é igual a um decimal que se repete indefinidamente. Por exemplo,

$$\frac{3}{7}$$
 = 0,428571 428571 428571 428571 ...

A tarefa de provar isso não é tão simples. Ela envolve (i) compreender o sentido de um decimal infinito como sendo um ponto na linha numérica, (ii) mostrar que *através do processo de divisão longa*, a fração  $\frac{3}{7}$  é igual ao decimal infinito acima e (iii) provar que um decimal

infinito necessariamente se repete indefinidamente. Nos livros didáticos escolares, basicamente nenhum desses três passos é provado (embora possa se encontrar alguma tentativa não muito entusiasmada de explicar (iii)), o que é compreensível se considerarmos a natureza avançada da matemática envolvida. Os materiais normalmente se concentram em explicar (iii), mas ignoram completamente (ii) e (i). Seria uma boa ideia tocar sutilmente em (i), ao menos para professores do ensino básico, mas (ii) deveria ser abordado com muita seriedade na formação de professores. Mostra-se diretamente com o algoritmo de divisão longa que

$$\frac{3}{7} = \frac{4}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^6} \left( \frac{4}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \frac{1}{10^6} \right) + \dots$$

Isto é então o significado de  $\frac{3}{7}$  = 0,428571 428571... em um nível. A

parte mais difícil é compreender o sentido de *séries infinitas* (como estas "somas infinitas" são chamadas) e provar que esta série em particular é sempre convergente.

(C) Números racionais. Assim como o ensino das frações, o ensino de números racionais (frações positivas e negativas) é normalmente nada mais que a apresentação de uma coleção de regras a serem memorizadas, com uma ocasional pseudoexplicação colocada sem cuidado (assim como as muitas analogias pretendendo mostrar por que *negativo* x *negativo* = *positivo*). Números racionais apresentam um nível maior de abstração do que frações, e podem ser entendidos somente se as abstratas propriedades de operações, especialmente a propriedade distributiva para frações tanto positivas quanto negativas, são levadas a sério. Poucos de nossos professores captam essa mensagem em seus cursos universitários. Este é um tema cheio de afirmações plausíveis promovidas sem cerimônia como verdades sem explicações, e.g., a

afirmação de que 
$$\frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}$$
 para todos os números racionais

(e não só para os números inteiros não-negativos) x e y. Em nenhuma outra situação é mais importante que prestemos atenção à clareza da definição de cada conceito e da prova de cada asserção.

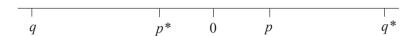
Com o conceito de **número** compreendido como um ponto na linha numérica, podemos agora olhar para todos os números como um todo. Tome qualquer ponto p na linha numérica que não seja igual a 0; tal p poderia estar em qualquer um dos lados do 0 e, em particular, não precisa ser uma fração. Denomine  $p^*$  sua reflexão espelhada no lado oposto de 0, i.e., p e  $p^*$  são equidistantes de 0 e estão em lados opostos em relação a 0. Chamamos  $p^*$  simplesmente de **reflexão espelhada** de p. Se p = 0, definimos

$$0 *= 0$$

Assim, para qualquer ponto p, fica claro que

$$p^{**} = p$$

Isto nada mais é do que uma forma sucinta de expressar o fato de que refletir um ponto não-nulo em respeito a 0 duas vezes sucessivamente o leva de volta a ele mesmo (se p = 0, claro,  $0^{**}=0$ ). Aqui estão dois exemplos de reflexões espelhadas:



Porque as frações estão à direita de 0, os números tais como 1\*,

 $2^*$  ou  $\left(\frac{9}{5}\right)^*$  estão à esquerda de 0. O conjunto de todas as frações e suas  $m = \left(\frac{k}{5}\right)^*$ 

reflexões espelhadas com respeito a 0, i.e., os números  $\frac{m}{n}$  e  $\left(\frac{k}{l}\right)^*$  para

os números inteiros não-negativos k, l, m, n ( $l \ne 0$ ,  $n \ne 0$ ), é denominado conjunto dos **números racionais**. Lembre que os números inteiros não-negativos são um subconjunto das frações. Este conjunto dos números inteiros não-negativos e suas reflexões espelhadas,

..., 
$$3^*$$
,  $2^*$ ,  $1^*$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $3$ , ...:

é o conjunto dos chamados **números inteiros**. Temos portanto (o símbolo "⊂" significa "está contido em"): números inteiros não-negativos ⊂ números inteiros ⊂ números racionais

Estendemos agora a **ordenação** entre os números, de frações a todos os números: para qualquer x, y na linha numérica, x < y significa que x está à esquerda de y. Uma notação equivalente é y > x.



Números que estão à direita do 0 (portanto aqueles x que satisfazem x > 0) são denominados **positivos**, e aqueles que estão à esquerda do 0 (portanto aqueles que satisfazem x < 0) são **negativos**.

Então  $2^*$  e  $\left(\frac{1}{3}\right)^*$  são negativos, enquanto todas as frações diferentes

de zero são positivas, mas se y é um número negativo para início de conversa, y\* seria positivo. O número 0 não é, por definição, nem positivo nem negativo. Como é bem conhecido, um número tal como

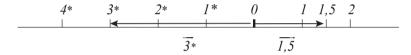
2\* é normalmente escrito como -2 e 
$$\left(\frac{1}{3}\right)^*$$
 como - $\frac{1}{3}$ , e o sinal de "-"

na frente de -2 é chamado de **sinal negativo**. Entretanto, é melhor evitar mencionar o sinal negativo até que tratemos de subtração, porque devemos desenvolver um conceito de cada vez.

Para as necessidades dos professores em sala de aula, seria uma boa ideia começar a discussão sobre a aritmética de números racionais com uma abordagem concreta da adição com números racionais. Para esse propósito, definimos um **vetor** como um segmento na linha numérica, juntamente com uma designação de uma de suas duas extremidades como o ponto de início e a outra como o ponto de término. O comprimento do segmento é chamado de módulo do vetor, e diremos que o vetor é **orientado para a esquerda** se seu ponto de término está à esquerda do ponto de início, e que o vetor é **orientado** para a direita se seu ponto de término está à direita do ponto de início. A **orientação** de um vetor, portanto, diz respeito a ele estar apontando para a esquerda ou para a direita. Denotamos vetores com a colocação de uma seta acima da letra, e.g.,  $\vec{A}$ ,  $\vec{x}$  etc., e em figuras colocamos uma ponta de seta no ponto de término do vetor para indicar sua orientação. Por exemplo, o vetor  $\vec{K}$  abaixo é orientado para a esquerda e possui módulo 1, com o ponto de início em 1\* e o ponto de término em 2\*, enquanto o vetor  $\vec{L}$  é orientado para a direita e possui módulo 2, com o ponto de início em 0 e o ponto de término em 2.

Por definição, **dois vetores serem iguais** significa exatamente que eles possuem o mesmo ponto de início, o mesmo módulo e a mesma orientação.

Com o propósito de discutir a adição de números racionais, podemos continuar simplificando as coisas ao restringir a atenção para uma classe especial de vetores. Seja x um número racional, definimos então um vetor  $\vec{x}$  como sendo um vetor cujo ponto de início é em 0 e o ponto de término em x. Segue então, a partir da definição, que se x é uma fração não-nula, então o segmento do vetor  $\vec{x}$  é exatamente [0,x]. A seguir estão dois exemplos de vetores que se originam de números racionais:



Com esta notação compreendida, passamos agora a descrever como somar tais vetores. Dados  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ , onde x e y são dois números racionais, o vetor **soma**  $\vec{x} + \vec{y}$  é, por definição, o vetor cujo ponto de início é 0 e cujo ponto de término é obtido da seguinte forma:

desloque  $\vec{y}$  ao longo da linha numérica até que seu ponto de início (que é 0) esteja em x, daí então o ponto de término de  $\vec{y}$  nesta nova posição é por definição o ponto de término de  $\vec{x} + \vec{y}$ .

Por exemplo, se x e y são números racionais, como mostrado:



Então, por definição,  $\vec{x} + \vec{y}$  é o ponto indicado,



Estamos agora na posição de definir a adição de números racionais. A **soma** x + y para quaisquer dois números racionais x e y é por definição o ponto de término do vetor  $\vec{x} + \vec{y}$ . Em outras palavras,

$$x + y =$$
o ponto de término de  $\vec{x} + \vec{y}$  .

Colocando de outra forma, x + y é definido como sendo o ponto na linha numérica tal que seu vetor correspondente (x + y) satisfaz:

$$\overrightarrow{(x+y)} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$$
.

Procedemos agora à prova de que a adição de números racionais é comutativa, i.e., x+y=y+x para todos os números racionais. É claro que isso é equivalente a verificar que  $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ . Lembrando que dois vetores são iguais se e somente se eles possuem o mesmo módulo e a mesma orientação, verificamos simplesmente que  $\vec{x}+\vec{y}$  e  $\vec{y}+\vec{x}$  possuem de fato o mesmo módulo e a mesma orientação. A verificação é bastante simples e direta.

Pode-se também provar que a adição de números racionais é associativa, i.e., (x + y) + z = x + (y + z) para todos os números racionais x, y, z. Entretanto o raciocínio neste caso é bem mais tedioso e não tão instrutivo.

Com essa definição da adição de números racionais, pode-se provar de maneira "braçal" os seguintes fatos básicos para todas as frações *positivas s* e *t*:

$$s + t = \text{ a velha adição de frações.}$$

$$s^* + t^* = (s + t)^* \text{ (e. g., } 2^* + 5^* = (2 + 5)^*)$$

$$s + t^* = (s - t) \text{ se } s \ge t \qquad \left(e.g., 6 + \left(\frac{1}{2}\right)^* = \left(6 - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$s + t^* = (t - s)^* \text{ se } s < t \qquad \left(e.g., 2\frac{1}{2} + 7^* = \left(7 - 2\frac{1}{2}\right)^*\right)$$

Devido ao fato de que  $s^*+t=t+s^*$ , pela propriedade comutativa da adição, os quatro casos acima esgotam todas as possibilidades no que diz respeito à adição de dois números racionais quaisquer. Apenas determinamos explicitamente como somar dois números racionais quaisquer em termos da adição e da subtração de frações.

Devemos confrontar agora o fato de que números racionais estão em um nível de abstração superior ao de frações. Um fato que não foi mencionado na breve discussão sobre frações é que a adição e a multiplicação de frações satisfazem as propriedades associativa, comutativa e distributiva, mas agora as coisas irão mudar. Acabamos de trazer à discussão a comutatividade e a associatividade da adição entre os números racionais. Neste ponto, estas propiedades devem tomar a frente, porque enquanto a adição de números racionais pode ser diretamente definida a partir do conceito de vetores, não haverá uma analogia similar para a multiplicação. Quanto a esta, temos que abordá-la a partir de uma perspectiva diferente, que nos ofereça alguma vantagem. Assim, para nos prepararmos para a multiplicação, esqueceremos a definição anterior de adição em termos de vetores e "começaremos do começo". Mas, claro, veremos no final que as duas abordagens produzem resultados idênticos.

Adotamos agora uma postura de estabelecer que, embora não saibamos o que são números negativos, o conjunto de números racionais simplesmente "deve" satisfazer as propriedades associativa, comutativa e distributiva com respeito à adição e à multiplicação. Historicamente, isso foi o que aconteceu, e é claro que nossa preguiça intelectual dá as boas-vindas ao *status quo*! Sendo este o caso, uma maneira razoável de desenvolver a adição de números racionais é, antes de mais nada, fazer três **hipóteses fundamentais** sobre a adição de números racionais. As duas primeiras hipóteses fundamentais são plenamente não-controversas:

(A1) Dados dois números racionais x e y quaisquer, existe uma maneira de somá-los de forma a obter outro número racional x + y tal que, se x e y são frações, x + y é o mesmo que a adição usual de frações. Além disso, esta adição de números racionais satisfaz as propriedades associativa e comutativa.

(A2) x + 0 = x para qualquer número racional x.

A última hipótese prescreve explicitamente o papel de todas as frações negativas:

(A3) Se x é um número racional qualquer,  $x + x^* = 0$ .

Com base em (A1)–(A3), pode-se proceder ao cálculo da soma de dois números racionais em termos da adição e subtração de frações como anteriormente. Sejam s e t duas frações positivas quaisquer. De (A1), temos

s + t = a velha adição de frações.

Pode-se provar então, com algum esforço, que (A1)–(A3) implicam que

$$\begin{cases} s^* + t^* = (s+t)^* \\ s + t^* = (s-t) & \text{se} & s \ge t \\ s + t^* = (t-s)^* & \text{se} & s < t \end{cases}$$

Fazemos agora uma pausa para detalhar a segunda igualdade acima reescrevendo-a como

$$s - t = s + t^*$$
 quando  $s \ge t$ .

A subtração ordinária de *frações s - t* se transforma agora na adição de s e  $t^*$ . Esse fato nos induz a **definir**, em geral, que a subtração entre dois *números racionais x* e y quaisquer significa:

$$x - y = x + y^*$$

Observe o fato óbvio de que o significado da subtração de (digamos) dois *números racionais*  $\frac{6}{5} - \frac{3}{4}$  é, de acordo com esta definição,

$$\frac{6}{5} + \left(\frac{3}{4}\right)^*$$

o que, por conta de " $s+t^*=(s-t)$  se  $s\geq t$ ", é simplesmente a subtração de frações  $\frac{6}{5}-\frac{3}{4}$ . De forma mais geral, quando x,y

são frações e  $x \ge y$ , o significado de x - y como uma subtração de números racionais coincide, de acordo com esta definição, com o velho significado de subtrair frações. Em outras palavras, não criamos um novo conceito de subtração, apenas o tornamos

mais compreensível. Para repetir,  $\frac{6}{5}$  -  $\frac{3}{4}$  tem exatamente o

mesmo significado *quer* vejamos como uma subtração entre frações, *quer* como uma subtração entre números racionais; isso é reconfortante. Por outro lado, estamos agora livres para fazer uma subtração entre duas frações quaisquer, tal como

 $\frac{3}{4} - \frac{6}{5}$ , enquanto antes (i.e., ao discutir subtração de frações), tal

subtração não seria admissível porque a primeira fração é menor que a segunda. Vemos agora pela primeira vez a vantagem de ter os números racionais à disposição: podemos livremente subtrair duas frações quaisquer assim como as somamos. Mas isso vai mais além, porque podemos agora subtrair dois *números racionais* quaisquer.

A principal mensagem que resulta dessa definição é, entretanto, o fato de que *a subtração é apenas uma maneira diferente de escrever a adição* entre números racionais.

Como consequência da definição de x - y, temos

$$0 - y = y^*$$

porque  $0 + y^* = y^*$ . O bom-senso diz que devemos **abreviar 0 - y para** -y. Temos então

$$-y=y^*$$

É somente neste ponto que podemos abandonar a notação de  $y^*$  e substituí-la por -y. Muitas das igualdades anteriores assumirão agora uma aparência mais familiar, e.g., de  $x^{**}$  = x para qualquer número racional x, obtemos

$$-(-x)=x$$

e de  $x^* + y^* = (x + y)^*$ , obtemos

$$-(x+y) = -x-y$$

Chegamos agora à multiplicação de números racionais e vemos a recompensa de uma abordagem mais abstrata à adição de frações. Para a multiplicação, faremos as seguintes **hipóteses fundamentais** similares de que

(M1) Dados dois números racionais x e y, existe uma maneira de multiplicá-los para obter outro número racional xy, de forma que, se x e y são frações, xy é o produto usual de frações. Além disso, esta multiplicação de números racionais satisfaz às propriedades associativa, comutativa e distributiva.

(M2) Se x é um número racional, então  $1 \cdot x = x$ .

Notamos que (M2) deve ser uma hipótese porque não saberíamos o que  $1 \times 5^*$  significa sem (M2). O fato igualmente "óbvio", que é a contraparte multiplicativa de (A2), de que

(M3) 
$$0 \cdot x = 0$$
 para qualquer  $x \in Q$ .

acaba por ser demonstrável uma vez que se assume (M1) e (M2) como verdade.

Desejamos saber explicitamente como multiplicar números racionais. Assim, sejam x, y números racionais. O que é xy? Se x = 0 ou y = 0, acabamos de ver, de (M3), que xy = 0. Podemos, portanto, assumir que tanto x quanto y sejam não-nulos, de forma que cada um deles é ou uma fração, ou o negativo de uma fração. Sendo s, t frações positivas, pode-se provar com base em (M1)-(M3):

$$(-s)t = -(st) \quad \left(e.g., \quad (-3)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}\right)$$

$$s(-t) = -(st) \quad \left(e.g., \quad 3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}\right)$$

$$(-s)(-t) = st \quad \left(e.g., \quad \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10}\right)$$

Como já sabemos como multiplicar as frações *s* e *t*, descrevemos completamente o produto de números racionais.

O último item, que se s e t são frações então (-s)(-t) = st, é parte tão grande da matemática escolar que vale a pena tratar de ao menos um caso especial. Quando alunos ficam intrigados com este fenômeno, a descrença é centrada em como o produto de dois negativos pode resultar em positivo. A urgente necessidade nesta situação é provavelmente a de vencer a batalha psicológica. Propomos então utilizar um exemplo simples para demonstrar

por que *tal fenômeno é inevitável*. Daremos portanto o motivo pelo qual

$$(-1)(-1) = 1$$

Concentremo-nos na parte desta asserção que diz que (-1)(-1) é um número *positivo*. Seria ótimo se pudéssemos demonstrar isto através de um cálculo direto no seguinte sentido. Suponha que queremos mostrar que (-3) - (-8) é positivo. Podemos fazer isso utilizando a definição de subtração e as regras acima para a adição de números racionais para concluir que

$$(-3)$$
 -  $(-8)$  =  $(-3)$  +  $(-8)$ \* = 3\* + 8 = 8 + 3\* =  $(8 - 3)$  = 5 > 0

Esta é uma prova muito satisfatória porque vemos explicitamente como a resposta "5" é obtida a partir de um cálculo direto. Tal prova não deixa espaço para dúvidas. Infelizmente, esse tipo de prova nem sempre está disponível, e por vezes somos forçados a usar um método indireto para encontrar a resposta. Para dar a essa linha de raciocínio um contexto, talvez você se lembre do que aprendeu de química na sua escola: se você precisasse descobrir se o líquido de uma garrafa é ácido ou alcalino, o ideal seria que houvesse uma etiqueta clara dizendo que se trata de HCl ou amônia. Se não, você teria que recorrer a um método indireto, mergulhando uma tira de papel de tornassol azul no líquido: se a tira se tornasse vermelha, então seria um ácido. Assim, você tem que confiar no papel de tornassol e permitir que ele forneça a informação desejada indiretamente. O mesmo acontece com (-1)(-1). Não existe um cálculo explícito conhecido com (-1) (-1), de forma que um número positivo apareça subitamente no fim do cálculo, mas um possível "teste do tornassol" neste caso seria somar a (-1)(-1) um número negativo. Se a resposta for 0 ou positiva, então você teria que concordar que (-1)(-1) é um número positivo. Isso é exatamente o que faremos.

Testaremos então a positividade de (-1)(-1) adicionandolhe o número negativo -1. Por que -1 e não algum outro número negativo? Isso vem da experiência e de algum senso comum; uma maneira é se perguntar *por que não* -1? Afinal, é natural pensar em -1 neste contexto particular. Em todo caso, iremos aplicar a propriedade distributiva (hipótese (M1)) a esta soma e obter:

$$(-1)(-1) + (-1) = (-1)(-1) + 1 \cdot (-1) = [(-1) + 1](-1) = 0 \cdot (-1) = 0$$

onde a última igualdade vem de (M3). Isto mostra portanto que, se acreditamos na propriedade distributiva para números racionais, deve ser verdade que (-1)(-1) é positivo. Na verdade, sabemos um pouco mais: se (-1)(-1) somado a -1 é 0, então (-1) (-1) tem que ser 1. Em outras palavras, (-1)(-1)=1.

O fato de que a propriedade distributiva vale para números racionais é também responsável pela asserção geral de que (-s)(-t) = st (-s)(-t) = st.

O conceito da divisão de números racionais é o mesmo que o da divisão de números inteiros não-negativos ou de frações. Para dois números racionais x e y, com  $y \neq 0$ ,  $\frac{x}{v}$  é por

definição o número racional z tal que x = zy. Como no caso das frações, a existência e unicidade de tal z devem ser provadas. Assumindo isso, podemos agora apagar uma confusão comum no estudo de números racionais, mencionada acima, a respeito da razão pela qual as seguintes igualdades são verdadeiras:

$$\frac{3}{-7} = \frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$$

Primeiramente, seja  $C = -\frac{3}{7}$ . Desejamos provar que  $\frac{3}{-7} = C$ . Isto seria verdade, por definição, se pudéssemos provar que  $3 = C \times (-7)$ , e isto é verdade porque

$$C \times (-7) = \left(-\frac{3}{7}\right) \times (-7) = \left(\frac{3}{7}\right)(7) = 3$$

onde utilizamos que (-a)(-b) = ab para todas as frações. Isso prova claramente que  $\frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}$ . De forma similar, podemos provar que  $\frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$ .

De forma mais geral, o mesmo raciocínio sustenta a asserção de que, se k e l são números inteiros não-negativos e  $l \neq 0$ , então

$$\frac{-k}{l} = \frac{k}{-h} = -\frac{k}{l} \qquad e \qquad \frac{-k}{-l} = \frac{k}{l}$$

Podemos também resumir estas duas fórmulas na seguinte afirmação: para qualquer par de números inteiros a e b, com  $b \neq 0$ ,

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Esta fórmula é praticamente indispensável nos cálculos cotidianos com números racionais. Em particular, ela implica que

todo número racional pode ser escrito como o quociente de dois números inteiros.

Por exemplo, o número racional negativo  $-\frac{9}{7}$  pode ser escrito como qualquer um dos dois seguintes quocientes de integrais:  $\frac{-9}{7}$  ou  $\frac{9}{-7}$ .

O conceito de frações complexas tem uma contraparte nos números racionais, é claro. Por falta de um nome melhor, nós os chamamos de **quocientes racionais**: então estes são os quocientes de números racionais. Como no caso das frações complexas, quocientes racionais podem ser somados, subtraídos, multiplicados e divididos como se seus numeradores e denominadores fossem números inteiros.

Finalmente, para comparar números racionais, relembre a definição de x < y entre dois números racionais x e y: significa que x está à esquerda de y na linha numérica.



As seguintes desigualdades são básicas em qualquer discussão sobre números racionais e, portanto, pertencem à matemática das séries finais do ensino fundamental. Aqui, x, y, z são números racionais, e o símbolo " $\Leftrightarrow$ " representa "é equivalente a":

- (i) Para quaisquer x, y,  $x < y \Leftrightarrow -x > -y$ .
- (ii) Para quaisquer x, y, z,  $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$ .
- (iii) Para quaisquer x, y, z, se z > 0, então  $x < y \iff xz < yz$ .
- (*iv*) Para quaisquer x, y, z, se z < 0, então  $x < y \Leftrightarrow xz > yz$ .

Desses itens, o (*iv*) é o mais intrigante. Nós fornecemos o argumento intuitivo de que "z < 0 e x < y implicam que xz > yz", que pode ser refinado para se tornar um argumento correto. Considere o caso especial em que 0 < x < y e z = -2. Desejamos então entender por que (-2)y < (-2)x. Sabemos que (-2)y = -2y e (-2)x = -2x. Assim, queremos ver, intuitivamente, por que -2y < -2x. De 0 < x < y, temos a seguinte figura:



Então as posições relativas de 2x e 2y não mudam, mas cada uma é deslocada mais para a direita de 0:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 2x & 2y \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Se espelharmos esta figura em relação a 0, temos:



Vemos que -2y está agora à esquerda de -2x, de forma que -2y < -2x, como dito.

Obviamente, esta consideração permanece essencialmente inalterada se o número 2 é substituído por qualquer número negativo z.

(D) Geometria. Os professores são geralmente mal preparados quando o assunto é geometria (cf. IMAGES), o que é sem dúvida um reflexo de quão mal a geometria tem sido ensinada. Por exemplo, livros didáticos normalmente passam a impressão de que a geometria introdutória trata simplesmente de adquirir um novo vocabulário, e não um vocabulário preciso. O que deve ser feito para desfazer esse dano é, antes de mais nada, tornar esse vocabulário preciso, e depois mostrar claramente que a essência da geometria é o raciocínio lógico por trás do estudo preciso de figuras espaciais.

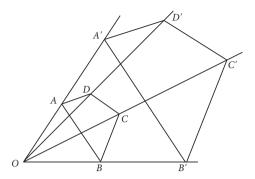
A precisão no vocabulário é necessária porque é somente através deste vocabulário que podemos transcrever informação espacial intuitiva para matemática precisa, e é inteiramente neste vocabulário que baseamos nosso raciocínio. As definições de conceitos comuns tais como ângulos, figuras convexas, polígonos etc., são tudo menos óbvias. Básicos na matemática das séries iniciais, são, é claro, os conceitos de paralelismo e perpendicularidade. Deve-se também estabelecer aqui uma distinção entre aquilo que os professores das séries iniciais devem conhecer e o que eles ensinam a seus alunos. A precisão que eles, enquanto professores, devem aprender pode não ser diretamente traduzível para materiais adequados de sala de aula, pois pode confundir os alunos das séries iniciais nesta etapa de seu desenvolvimento matemático. Todavia, cabe aos professores aprender a definição com tal precisão, pois eles precisam conhecer toda a verdade antes de poder esconder judiciosamente detalhes desagradáveis a serviço do bom ensino. Parte da formação dos professores em geometria incluiria idealmente muitos desenhos à mão e outras atividades do tipo "mão-na-massa", como a construção de poliedros regulares. Deve existir uma integração do input espacial direto com um *output* verbo-analítico em uma lição de geometria.

Um componente importante no ensino da geometria nas séries iniciais é fazer os alunos apreciarem a simetria nas figuras geométricas. A melhor forma de explicar simetria no plano é através da utilização dos três **movimentos rígidos básicos** no plano: **rotação, translação** e **reflexão** (os professores devem ser afastados da terminologia não-civilizada de "rodar, deslizar e virar"). Certamente, a formação pedagógica deve fornecer definições precisas desses conceitos, e neste caso deve incluir a informação de que, com a disponibilidade de transparências (para uso em projetores), esses conceitos podem ser demonstrados graficamente de forma que, na sala de aula das escolas, as definições precisas podem ser introduzidas suavemente em troca de uma compreensão tátil e intuitiva. A demonstração mencionada consiste em fazer desenhos idênticos em duas transparências, preferivelmente em cores diferentes. Ao mover um contra o outro, os efeitos dos movimentos de corpo rígido

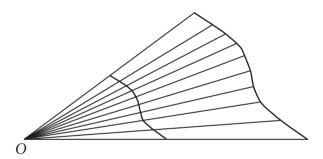
básicos, e suas composições, podem ser exibidos de forma bastante elucidativa, e os alunos adquirem uma sólida concepção a respeito do que esses movimentos fazem. Ver Wu, 2011c.

Há outra razão pela qual os professores das séries iniciais devem possuir ao menos uma compreensão básica desses movimentos de corpo rígido: eles precisam de uma concepção clara de **congruência** como uma composição finita dos movimentos de corpo rígido básicos. Eles devem aprender que, embora "mesmo tamanho, mesma forma" seja uma boa introdução ingênua à congruência, o entendimento deles mesmos a respeito desse importante conceito deve ir além do nível ingênuo para que ensinem bem. Além disso, essa definição precisa de congruência proporciona diversas oportunidades de experiências com a "mão-na-massa" para verificar se duas figuras são congruentes ou não, e tornar tais oportunidades disponíveis para os alunos em uma idade precoce significa educação de qualidade.

Os professores das séries iniciais devem também possuir certa familiaridade com o conceito de **similaridade** como uma **dilatação** seguida de uma congruência. É suficiente fazer vários desenhos a mão para se familiarizar com dilatações. Por exemplo, se desejamos obter a imagem dilatada de um dado quadrilátero *ABCD* com um fator de escala de 2.1, tomamos um ponto *O*como o centro da dilatação, e desenhamos raios de *0* até os vértices. Em cada um desses raios, digamos o raio de *O* a *A*, marcamos *A'* de forma que a distância de *O* até *A'* seja 2.1 vezes a distância de *O* a *A*. Obtemos então o quadrilátero A'B'C'D', que é por definição a **magnificação** de *ABCD* para 2.1 vezes seu tamanho original.



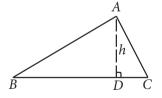
O poder deste conceito de dilatação é melhor ilustrado através da magnificação (ou *encolhimento*) de uma figura que seja *curva*. Por exemplo, com a pequena curva vermelha apresentada (ver abaixo) e com o ponto  $\theta$  escolhido como centro, escolha alguns pontos na curva, e então no raio de  $\theta$  até aquele ponto, marque um ponto que seja o dobro da distância a  $\theta$ . Desta forma, a coleção de pontos resultante dará a forma aproximada da curva que "a magnificação da curva original por um fator de escala de 2", como mostrado pela coleção de pontos abaixo.

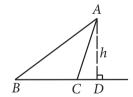


Não é preciso nem mencionar que, pegando mais pontos na curva original, obtemos uma coleção maior de pontos que proporcionam uma melhor aproximação da curva magnificada. Se mil pontos são escolhidos na curva original, então a coleção resultante de pontos parecerá a olho nu uma curva magnificada suave. É assim que magnificação (ou contração) é feita em fotografia digital. Em todo caso, todo o sentido de se introduzir o conceito de dilatação está não somente em ilustrar como

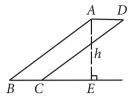
se pode magnificar ou contrair uma dada figura de maneira simples, mas também em fornecer aos professores das séries iniciais uma alternativa para explicar do que se trata *realmente* a similaridade.

Outro tópico importante no ensino da geometria elementar é o conceito de medida, que leva às fórmulas básicas de medição para áreas de retângulos, triângulos, circunferências de círculos etc. Se desejamos ensinar a importância do raciocínio lógico na geometria, então uma maneira é dar provas corretas dessas fórmulas de medição. Atualmente, existem dois defeitos comuns na apresentação dessas fórmulas nos livros didáticos. A primeira é que, para a fórmula da área de um retângulo (como base vezes altura), a maioria dos livros didáticos escolares fornece a prova somente para o caso em que os comprimentos dos lados são inteiros positivos. A prova para este caso é tão simples que os alunos podem não adquirir nenhuma impressão sobre o que é o conceito de área ao demonstrá-la. Por outro lado, a prova para o caso em que os comprimentos dos lados são frações é, de fato, bastante esclarecedora e deve ser uma parte básica do repertório de professores das séries iniciais. (Ver Capítulo 17 de Wu, 2011b.) Infelizmente, tal prova parece não estar nas páginas de nenhum livro didático (ver se está nos livros do IAB). Um segundo defeito está na derivação da fórmula de área de triângulos como metade da base vezes altura: a derivação é usualmente mostrada somente para o caso em que a altitude na base intersecta a base propriamente dita, assim como na figura à esquerda:





entretanto, é igualmente importante mostrar a derivação para o caso da direita, pois ele é necessário para a derivação da fórmula de área de paralelogramos e trapezoides como o seguinte:



Os professores das séries iniciais também devem estar cientes de que, conceitualmente, não existe diferença entre os conceitos de comprimento, área ou volume. Se chamarmos qualquer um desses conceitos de "medida", então, com base nos três inteiramente razoáveis argumentos a seguir, todas as fórmulas básicas de medição podem ser provadas:

- (1) A medida é igual para conjuntos congruentes.
- (2) A medida é **aditiva**, no sentido em que, se dois conjuntos são disjuntos exceto em seus respectivos contornos, então a medida da união é a soma das medidas dos dois conjuntos.
- (3) Se um conjunto S é o limite de uma sequência  $\{S_i\}$  em um sentido apropriado, então a medida de S é o limite das medidas dos  $\{S_i\}$ .

É claro que (3) precisa ser cuidadosamente qualificado, e qualquer discussão de "limite" deve permanecer intuitiva, mas com base na experiência, uma abordagem intuitiva não parece ser um obstáculo ao aprendizado na matemática escolar. Como bem se sabe, a introdução de limite nesta conjuntura é necessária se queremos calcular a circunferência e a área de um círculo com uma compreensão do significado do que está sendo feito. A característica digna de nota a respeito dessas hipóteses não está em (3), mas sim na maneira que a congruência entra na discussão de medida através de (1). O fato de que o conceito de congruência está por trás do conceito de medida não tem sido suficientemente enfatizado na matemática escolar, mas deveria ser. Esse é outro exemplo da coerência da matemática. Assim, o importante papel da congruência no estudo de medidas é um motivo pelo qual a congruência deve ser definida corretamente.

(E) Algebra. Estritamente falando, decidir se a álgebra deve ou não fazer parte do conhecimento básico de professores das séries iniciais não é uma questão trivial. Entretanto, na medida em que professores dessas séries não podem evitar a utilização de símbolos em suas lições – por exemplo, expressando o produto de frações como  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$  – eles precisam de um entendimento firme sobre a forma correta de usar símbolos, ainda mais porque o medo de "variáveis" corrompeu a percepção da matemática para muitos desses professores. Eles também precisam conhecer a maneira correta de resolver equações lineares, pois elas estão em toda parte nos problemas de percentagem, razão e taxa. O propósito da discussão subsequente a respeito de álgebra é ser tão informal quanto possível, pois, para professores das séries iniciais, a aquisição de habilidades algébricas formais não é o objetivo principal. O objetivo principal é promover o aprendizado da parte mais básica da álgebra, a saber, o uso fluente e correto de símbolos e o significado de resolver equações lineares.

No momento, todos os professores são educados a acreditar que o conceito de uma "variável" é o que distingue a álgebra da aritmética. Existem duas razões pelas quais essa tradição obstrui desnecessariamente o aprendizado. A primeira é que a literatura na área de educação matemática, incluindo livros didáticos de todos os níveis, não explicita o que é uma "variável". Por vezes ela é descrita como "uma quantidade que muda ou varia". Outras vezes, argumenta-se que a compreensão dos alunos sobre este conceito deve ir "além do reconhecimento de que letras podem ser usadas para representar números desconhecidos em equações", mas não é dito o que exatamente está "além" deste reconhecimento. Assim, os alunos são conscientizados de que existe um conceito que é tão importante quanto impossível de se aprender. Não é assim que a matemática escolar deveria ser. Uma segunda razão é que, embora matemáticos empreguem informalmente e com frequência a terminologia de "variável", não existe um conceito matemático denominado "variável". Uma terminologia informal não deve nunca ser elevada ao status de conceito formal. Quando matemáticos usam

a palavra "variável", o que eles têm em mente é ou "um elemento no domínio de definição de uma função", ou "um elemento em um fator do domínio de uma função que é também um produto direto", ou ainda "o termo indeterminado do anel de polinômios R[x]", mas certamente *nada varia na matemática*. No que diz respeito aos professores das séries iniciais, o importante é atingir a fluência na utilização de símbolos para representar números e fazer cálculos com eles; não é necessário se preocupar com o significado de uma "variável". Para mais discussões sobre como lidar com a questão pedagógica da utilização de símbolos e do significado de "variável", ver pp. 3-6 de Schmid-Wu.

Digamos que a letra x representa um número ou, de forma mais geral, um dos números de uma coleção particular de números, da mesma forma que o pronome "ele" designa às vezes um homem americano. Por exemplo, alegamos que quaisquer números x e y (sem restrição) satisfazem xy = yx (propriedade comutativa da multiplicação). Ou podemos dizer que para todos os *números inteiros não-negativos* n,  $1+2+\ldots+(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ . Daí então qualquer expressão

(algébrica) em x é um número, e todo o conhecimento acumulado a respeito de números racionais pode ser aplicado nessas expressões. Há uma advertência, entretanto. Porque só o que sabemos sobre tal x é que é um número em uma coleção particular, sem nenhum conhecimento de seu valor exato, cálculos com expressões em x devem então ser feitos utilizando apenas as regras que sabemos serem verdadeiras para todos os números desse tipo, tais como as propriedades associativa e comutativa e a propriedade distributiva. Fazer cálculos não com valores explícitos,

tais como 
$$\frac{3}{2} \left( 5 - \frac{11}{12} \right)$$
, mas com um número qualquer em uma coleção

põe em foco o conceito de **generalidade**. Em outras palavras, o que se pode afirmar sobre tais expressões em *x* deverá ser verdade para todos os números na coleção em questão, *em geral*. Por essa razão, álgebra elementar é *aritmética generalizada*. Pode não parecer familiar, mas

é aritmética, e apesar do desconforto inicial por parte dos alunos com a presença de uma grande quantidade de símbolos, eles irão rapidamente se acostumar a fazer cálculos com expressões polinomiais ou racionais como números ordinários. Note que alunos que não são proficientes em cálculos com números ordinários podem ficar ainda mais desconfortáveis neste momento. *Isso reforça a importância de uma base sólida de números racionais para o aprendizado da álgebra*. Ver a Recomendação 4 na página xvii de NMPa. Por exemplo, a seguinte adição de expressões racionais em um número *x* pode ser executada da mesma forma que com *quocientes racionais* (ver página 55).

$$\frac{x^2}{\left(3x^4+x+2\right)} + \frac{6}{\left(x^2+5\right)} = \frac{x^2\left(x^2+5\right) + 6\left(3x^4+x+2\right)}{\left(3x^4+x+2\right)\left(x^2+5\right)}$$

porque se k, l, m, n representam, respectivamente, os números  $x^2$ ,  $(3x^4+x+2)$ , 6 e  $(x^2+5)$ , então cada um desses é um número racional, e a igualdade se torna nada mais que a fórmula usual de adição de quocientes racionais:

$$\frac{k}{l} + \frac{m}{n} = \frac{kn + ml}{ln}$$

Três observações sobre o parágrafo anterior devem ser feitas no contexto da formação de professores. A primeira é que a consideração da aritmética de expressões racionais confirma por que a aritmética de frações complexas e quocientes racionais é indispensável ao aprendizado da álgebra. Os professores das séries iniciais precisam estar cientes desse fato para seu próprio ensino de frações e números racionais. A segunda é a referência acima a como um número (real). Na matemática escolar, os únicos tipos de números (reais) tratados com algum nível de detalhe são os racionais. Números irracionais são basicamente nada além de um nome. Infelizmente, não é uma tradição na matemática escolar falar explicitamente sobre a restrição a números racionais nas

discussões matemáticas sobre números reais. Por exemplo, o parágrafo anterior assume implicitamente que *mesmo se x é um número irracional, a soma das duas expressões racionais acima continua valendo*. Isso é de fato correto por conta de considerações avançadas sobre a "extensão das funções contínuas de números racionais a números reais". Não obstante o fato de que tal explicação está além do nível da formação de professores das séries iniciais, temos que fazer com que os professores de todos os níveis estejam cientes dessa extrapolação dos números racionais para todos os números (reais). Pode-se formular sucintamente esta extrapolação como a **Hipótese Fundamental da Matemática Escolar**, em inglês, **FASM – Fundamental Assumption of School Mathematics** (ver Capítulo 21 de Wu, 2011b):

Toda informação sobre as operações aritméticas com frações podem ser extrapoladas para todos os números reais.

Um terceiro e último comentário é que, se x é um número inteiro não-negativo, então a soma acima

$$\frac{x^2}{(3x^4 + x + 2)} + \frac{6}{(x^2 + 5)}$$

se torna uma soma de duas frações (ordinárias) porque os numeradores e denominadores são números inteiros não-negativos. Note então a forma como a adição foi feita, utilizando-se a seguinte fórmula básica

$$\frac{k}{l} + \frac{m}{n} = \frac{kn + ml}{ln}$$

sem se preocupar com o mínimo denominador comum dos números inteiros não-negativos  $3x^4 + x + 2$  e  $x^2 + 5$ . Se os professores das séries iniciais puderem perceber esse fato a respeito da álgebra, então eles se darão conta de quão equivocado é ensinar a soma de frações utilizando o mínimo denominador comum, que é como a maioria dos livros didáticos ainda faz.(atenção ver com Osmar como IAB faz) Esse é outro exemplo da coerência da matemática, e um dos motivos pelos

quais os professores das séries iniciais devem ter uma base sólida na utilização de símbolos. A propósito, isso também serve para enfatizar a recomendação geral de que todos os professores conheçam a matemática de diversas séries, de forma que seu conhecimento vá além daquilo que eles ensinam (cf. NMPa, Recomendação 19 na página xxi.)

Deve ser apontado que, para dados números x e y e número inteiro não-negativo n, a propriedade distributiva leva a

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y)(x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \dots + xy^{n-1} + y^n)$$

para quaisquer dois números x e y, e qualquer inteiro positivo n. (3)

Porque a igualdade acima entre essas duas expressões em x e y é válida para todos os números x e y, nós a denominamos uma **identidade**. Fazendo y = 1, chegamos a outa identidade:

$$x^{n+1} - 1 = (x-1)(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1)$$

para todos os números x e para todos os inteiros positivos n. Se  $x \ne 1$ , multiplicar ambos os lados pelo número  $\frac{1}{x-1}$  e trocar os lados esquerdo e direito resulta em:

$$1 + x + x^{2} + x^{3} + \dots + x^{n} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

para qualquer número  $x \neq 1$ , e para qualquer inteiro positivo n. Isso é, claro, o chamado **somatório das séries geométricas finitas**. Note que, em cada um dos passos acima, estamos lidando com *números* e, portanto, não introduzimos nenhum novo conceito ou ferramenta.

Na formação de professores das séries iniciais, deveriam ensinar essa fórmula de somatório mostrando primeiramente alguns casos concretos, como n = 2, n = 3 e n = 4, antes de mostrar o caso de um número inteiro não-negativo n geral. A progressão natural é sempre de casos especiais para o caso geral. Os professores das séries iniciais achariam esta fórmula de somatório interessante e esclarecedora.

Se na identidade (3) dizemos que *x* e *y* são números inteiros não-negativos, então a identidade leva naturalmente à fatoração de certos números e, consequentemente, a uma discussão sobre primos e divisores. Ver a discussão anterior.

Existe, no momento, um grave erro na interpretação de como a solução de uma equação é atingida. Para os professores das séries iniciais, é suficiente considerar uma equação linear em uma variável. A percepção usual é de que o processo envolve a manipulação de expressões simbólicas e, porque o símbolo representando a incógnita é tratado como, bem, um símbolo, sem saber o que ele é, a transposição de um termo envolvendo este símbolo de um lado para o outro da equação deve ser feita através de uma manobra extramatemática, tal como o uso de uma balança para "pesar os dois lados". Os professores das séries iniciais, no entanto, devem saber a verdade. Toda equação é uma pergunta. Por exemplo, podemos nos perguntar: para que números x é verdade que 3x - 4 = 2x + 9? (Ver Seção 3 de Wu, 2010.) A solução então procede ao se assumir que existe tal x e deduzir qual deve ser, digamos x = 13. Daí então se verifica que 13 é de fato um número que satisfaz a equação. Se esses passos são seguidos com cuidado, pode-se ver por que as propriedades comutativa, associativa e distributiva - em sua total generalidade - são cruciais para a solução. Assim, essa é uma maneira de enfatizar a importância dessas propriedades aparentemente comuns.

(F) Probabilidade e estatística. É reconhecido já há bastante tempo por alguns matemáticos e estatísticos que as séries iniciais não são o lugar para se ensinar estatística séria. As publicações recentes do "Pontos Focais Curriculares" (em inglês, NCTM - Curriculum Focal Points) e do Núcleo de Padrões Estaduais Comuns (em inglês, CCSS - Common Core State Standards) finalmente reconheceram este fato. Não há mal nenhum em se discutir as noções básicas como moda, média e mediana para animar a discussão sobre fatos numéricos de vez em quando, mas os professores das séries iniciais devem estar cientes de que a estatística só aparece significativamente no ensino médio ou além, quando há preparação matemática suficiente para sustentar tal discussão. Eles devem ser alertados também para a falta de sentido da prática comum em testes padronizados de se perguntar a moda de um pequeno número de itens. O conceito de moda é significativo somente quando estamos lidando com um grande número de itens. Em todo caso, os professores das séries iniciais precisam conhecer os aspectos mais rudimentares da estatística, mas provavelmente não mais que isso.

Os professores dessas séries, entretanto, devem ser expostos aos conceitos básicos de probabilidade, como o fato de que probabilidades são números entre 0 e 1, ao conceito de espaço amostral, à relação entre probabilidade teórica e a frequência relativa de um evento, e, é claro, a fatos simples a respeito de coeficientes binomiais e combinações e permutações elementares. Em termos do currículo escolar das séries iniciais, os professores devem estar inteiramente confortáveis com as equivalências no mundo real do seguinte problema típico:

Suponha que você tem k bolas de cores distintas e n caixas numeradas,  $1, 2, \ldots, n$ , onde  $k \le n$ . De quantas maneiras distintas as k bolas podem ser colocadas nas n caixas se cada caixa comporta apenas uma bola? Agora suponha que l das bolas são vermelhas e que as k-l restantes são azuis, onde l é um número inteiro não-negativo tal que  $0 \le l \le k$ ; de quantas maneiras distintas as k bolas podem ser colocadas nestas k caixas se cada caixa comporta apenas uma bola?

#### Referências

- Ball, D. L.; Hill, H.; Bass, H. Knowing mathematics for teaching, *American Educator*, Fall 2005, 14-22, 43-46.
- Ball, D. L. The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education, *Elementary School Journal*, 90 (1990), 449-466.
- Behr, M. et al. Silver, Rational number concepts. In R. Lesh and M. Landau, (eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, Academic Press, NY, 1983, 91–126.
- Behr, M. J. et al. Rational number, ratio, and proportion. In D. Grouw, (ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, MacMillan, NY, 1992, 296–333.
- Bezuk N.; Bieck, M. Current research on rational numbers and common fractions: Summary and implications for teachers. In D. T. Owens, (ed.), *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics*, MacMillan, NY, 1993, 118–136.
- Borisovich, A. A selfish request, http://math.berkeley.edu/~giventh/TDS/m5.pdf (s.d.).
- California Department of Education. *Mathematics Framework for California Public Schools*, California Department of Education, Sacramento, 1999.
- Carpenter, T. P. et al. Results form the Second Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA,1981.
- Common Core State Standards for mathematics, June 2, 2010. http://www.corestandards.org/
- Curriculum Focal Points, National Council of Teachers of Mathematics, 2006. http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=270
- Hiebert, J.; Wearne, D. Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. In J. Hiebert (ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, Earlbaum, NJ, 1986, 199-223.
- Improving Measurement and Geometry in Elementary Schools (IMAGES). *Rationale*, http://images.rbs.org/preface.shtml#rationale
- Jensen, G. Arithmetic for Teachers, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- Kennedy, M. M.; Ahn, S.; Choi, J. The value added by teacher education. In M. Cochran-Smith, S. Feiman-Nemser, e J. McIntyre (ed.), in *Handbook* of Research on Teacher Education: Enduring Issues in Changing Contexts, Third Edition, Erlbaum, NJ, a sair.

- Kieren, T. On the mathematical, cognitive and institutional foundations of rational numbers. In R. Lesh and D. Bradbard, (eds.), Number and Measurement: Papers from a Research Workshop, ERIC/SMEAC, Columbus, OH, 1976.
- Kilpatrick, J.; Swafford, J.; Findell, B. (eds). *Adding It Up*, National Research Council, National Academy Press, 2001.
- National Council on Teacher of Mathematics (NCTM). The Mathematical Education of Teachers, Conference Board of the Mathematical Sciences, 2001.
- National Council on Teacher Quality (NCTQ). *No Common Denominator*, National Council on Teacher Quality, June 2008. http://www.nctq.org/p/publications/reports.jsp
- Pesek, D. D.; Kirschner, D. Interference of instrumental instruction in subsequent relational learning, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (2000), 524–540.
- Rittle-John, B.; Alibali, R. W. Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91 (1999), 175–189.
- Schmidt W.; Wu. H. The major topics of school algebra, 2008. http://math.berkeley.edu/~wu/NMPalgebra7.pdf
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher*, 15, 4-14.
- U.S. Department of Education. Foundations for Success: Reports of the Task Groups and Sub-Committees, The Mathematics Advisory Panel, U.S. Department of Education, Washington DC, 2008. http://www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/reports.html
- U.S. Department of Education. Foundations for Success: Final Report, The Mathematics Advisory Panel, U.S. Department of Education, Washington DC, 2008. http://www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf
- Vergnaud, G. Multiplicative structures. In R. Lesh and M. Landau, (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press, NY, 1983, 127–174.
- Wu, H. Mathematics of the Secondary School Curriculum, 2012 (projected date of completion).
- Wu, H. Fractions, decimals, and rational numbers. 2008, http://math.berkeley.edu/~wu/NMPfractions4.pdf
- Wu, H. How mathematicians can contribute to K-12 mathematics education, *Proceedings of International Congress of Mathematicians, 2006*, Volume III, European Mathematical Society, Madrid, 2006. Zurich, 2006, 1676-1688. http://math.berkeley.edu/~wu/ICMtalk.pdf

- Wu, H. Introduction to School Algebra, 2010, http://math.berkeley.edu/~wu/ Algebrasummary.pdf
- Wu, H. On the education of mathematics majors, Contemporary Is-sues in Mathematics Education, edited by E. Gavosto, S. G. Krantz, and W. G. McCallum, MSRI Publications, Volume 36, Cambridge University Press, 1999, 9-23. http://math.berkeley.edu/-wu/math-majors.pdf
- Wu, H. Preservice professional development of mathematics teachers, March, 1999. http://math.berkeley.edu/~wu/pspd2.pdf
- Wu, H. Teaching Geometry in Grade 8 and High School According to the Common Core Standards, http://math.berkeley.edu/~wu/CCSS-Geometry.pdf (Forthcoming)
- Wu, H. The mis-education of mathematics teachers, *Notices Amer. Math. Soc.* 58 (2011), 372-384. http://math.berkeley.edu/~wu/NoticesAMS2011.pdf
- Wu, H. Understanding Numbers in Elementary School Mathematics, Amer. Math. Soc., 2011.



# As competências numéricas pré-simbólicas: com base na psicologia cognitiva e na neurociência

**Xavier Seron** 

# Introdução

Neste capítulo, a cognição numérica e aritmética será examinada com atenção especial aos dados oriundos das neurociências cognitivas.

Inicialmente, evocarei de forma resumida alguns dados atuais a respeito do desenvolvimento da cognição numérica na criança. Limitarme-ei às linhas gerais das primeiras etapas desse desenvolvimento, com especial atenção aos trabalhos que se debruçaram sobre as competências da criança pequena *antes* do desenvolvimento da aritmética simbólica. Este texto apresentará alguns trabalhos contemporâneos importantes, mas não será exaustivo.

A seguir, descreverei alguns trabalhos, indicando quais são os fundamentos cerebrais estruturais e funcionais da aritmética no adulto e farei sua comparação com os estudos em crianças – estudos ainda raros hoje em dia.

Finalizando, indagarei que interesse poderão ter tais dados para os responsáveis pelo aprendizado da matemática pelas crianças.

# 1. Da conservação à contagem

Na tradição piagetiana que por muito tempo dominou o terreno da cognição numérica na criança, considerava-se que a criança nascia sem competências específicas para a aritmética e as representações numéricas, e que só acessava o conceito de número por volta dos 5 ou 6 anos de idade, ao final de uma longa progressão dedutiva que lhe permitia ultrapassar um conjunto de aspectos perceptivos (Piaget e Szeminska, 1941).

O paradigma experimental de base utilizado por essa escola consistia nas célebres tarefas de conservação. Tais tarefas, que conheceram múltiplas variantes, desenvolvem-se em geral em três fases: na primeira, o examinador leva a criança a constatar, por meio de um emparelhamento termo a termo, a igualdade de dois conjuntos. Na fase seguinte, ele realiza perante a criança uma transformação nesses conjuntos; por exemplo, modifica a densidade dos pontos de um dos dois conjuntos, ou ainda transfere os dois conjuntos de bolas de gude para vasos de largura diferente. E, numa terceira fase, pergunta à criança se, após essas modificações, os conjuntos continuam ou não a conter a mesma quantidade de elementos.

Em outras condições, o examinador modifica efetivamente as quantidades presentes, por acréscimos ou retiradas de elementos. Em tais situações, os pesquisadores da escola de Genebra demonstraram que as crianças menores deixavam-se enganar por variáveis perceptuais, e se, por exemplo, uma fileira de bolas tivesse – após a manipulação – se tornado mais comprida do que outra, ela considerava que essa fileira continha agora um maior número de bolas, mesmo que o examinador não tivesse realizado qualquer acréscimo, nem retirada. A perspectiva piagetiana levava assim a pensar que a criança não assimilara a conservação do número e que a mesma se construía pouco a pouco, pela observação e pela interiorização das regularidades do mundo.

Para a escola piagetiana, é à força de manipular conjuntos de objetos que a criança se dá conta de que o número é a única propriedade que não varia quando os objetos mudam de posição, de tamanho ou de natureza. Os piagetianos demonstraram ainda que as crianças têm dificuldades quando devem estabelecer comparações numéricas a propósito de conjuntos de elementos dentro de caixas: por exemplo, se uma criança de 5 anos é colocada diante de um conjunto de frutas contendo seis bananas e duas laranjas, ela poderá dizer que há mais

bananas do que laranjas, mas se lhe for perguntado se há mais frutas ou bananas ela responderá que há mais bananas! Os piagetianos deduziram daí que as crianças não dominam as regras de inclusão dos conjuntos na origem dos fundamentos da aritmética.

A perspectiva piagetiana influenciou em muito o mundo da educação e, em alguns ambientes, deduziu-se que não era preciso familiarizar as crianças com os números cedo demais (não antes de 6-7 anos) e que era mais conveniente ensinar-lhes a lógica dos conjuntos e as operações de seriação. Essa adesão de uma parte do mundo da educação às teorias piagetianas teve o sério inconveniente de negligenciar que tanto a perspectiva piagetiana sobre a noção de conjunto quanto as provas de conservação, em particular, foram criticadas sob diversos aspectos. Questionaram-se em primeiro lugar as dimensões pragmáticas da interação adulto-criança tal como se desenvolve nas tarefas de conservação (Donaldson, 1978, 1982) e sublinhou-se ainda o importante papel da linguagem empregada pelos examinadores na formulação das perguntas (Fayol, 1990). Enfim, a pouca atenção dada pela escola piagetiana às formas de contagem formuladas pelas crianças foi também várias vezes sublinhada (Siegel, 1977).

Um primeiro questionamento importante da perspectiva piagetiana foi feito por Gelman e Gallistel (1978). Os trabalhos desses autores nos levam a colocar as atividades de contagem no cerne do desenvolvimento das competências aritméticas e abrem caminho para a ideia de que a criança dispõe, desde o nascimento, de determinadas capacidades cognitivas no terreno numérico. Na essência da cognição aritmética, Gelman e Gallistel acreditam haver uma operação de contagem que nos permite indexar a numerosidade<sup>1</sup> de conjuntos. Na perspectiva inatista adotada por esses autores, a contagem é concebida como uma capacidade conceitual inata; trata-se de uma competência da qual o bebê disporia ao nascer, mas que não é capaz de exprimir num desempenho eficaz em virtude de limitações comportamentais (desenvolvimento insuficiente da memória de trabalho, dificuldade para combinar e planificar as ações necessárias a uma contagem eficaz) e também devido a limitações de utilização (a criança não compreende necessariamente em que tarefas a utilização da contagem poderia se revelar eficaz). O conhecimento conceitual na origem da contagem pode, segundo Gelman, ser descrito

<sup>1 (</sup>N.R.) Capacidade de perceber diferenças de quantidade.

através de cinco diferentes princípios: o princípio de correspondência termo a termo, que deve existir entre os objetos subtraídos e os números a eles associados; o princípio de ordem estável, segundo o qual a sequência dos nomes de números deve seguir uma sequência fixa; o princípio de cardinalidade, que implica que o último termo produzido ao fim da contagem corresponde ao cardinal do conjunto; o princípio de abstração, que permite contar conjuntos heterogêneos, e, por fim, o princípio de não pertinência da ordem, que corresponde ao fato de que a cardinalidade é insensível à ordem em que são selecionados os elementos de um conjunto. Uma grande parte da pesquisa em psicologia tenderá, então, a determinar o papel da contagem no desenvolvimento da cognição numérica e a definir sua natureza e variações comportamentais (Fuson, 1988; Fuson e Briars, 1982). Será assim, demonstrado que, contrariamente aos postulados de Gelman, se alguns princípios parecem existir desde muito cedo, outros aparecem mais tarde. O princípio da cardinalidade, por exemplo, não está presente antes de 4 a 5 anos de idade (Wynn, 1992). A seguir, sob a influência da psicologia cognitiva, que se interessa pelo estado inicial do bebê humano, os pesquisadores começam a estudar de forma muito mais extensa e mais sistemática as competências do lactente e de todas as crianças pequenas. No terreno da cognição numérica e aritmética, esse trabalho de inventário recebeu, ao longo dos últimos anos, um significativo recrudescimento de interesse devido às interações que se criaram entre o terreno da psicologia desenvolvimental, da neuropsicologia cognitiva e das neurociências. Esse trabalho de integração está claro em duas influentes obras de síntese publicadas na Europa, a primeira por Stanislas Dehaene, com o título La bosse des maths [A bossa da Matemática] (Dehaene, 1997) e a outra por Brian Butterworth com o título The Mathematical Brain [O cérebro matemático] (Butterworth, 1999).

O resultado mais tangível dos trabalhos dos últimos trinta anos é o fato de se ter estabelecido que o bebê humano dispõe desde muito cedo de capacidades especiais que lhe permitem tratar as numerosidades.<sup>2</sup> Essa competência, que se traduz em diversas atividades, constitui o que alguns autores, como Dehaene, chamam de *sentido numérico* ou *aritmética aproximativa*. Essa aritmética aproximativa seria

<sup>2</sup> Neste capítulo, o termo numerosidade refere-se a um conjunto de eventos físicos (três patos, três sons etc.).

uma disposição biológica inata e presente em todos os membros da espécie (salvo em casos de acidente cerebral ou problema específico de desenvolvimento). A proposta é aqui bastante forte e, como sugere Brian Butterworth, da mesma maneira que não precisamos aprender a discriminar as cores, o bebê humano dispõe de um sentido numérico que lhe permite discriminar numerosidades.

Grande parte da pesquisa contemporânea objetiva exatamente qualificar tais disposições iniciais, às vezes qualificadas de protonuméricas, e compreender como, ao se encontrarem com as informações culturais, podem elas servir de base para a aquisição de conhecimentos numéricos simbólicos.

# 2. Uma observação a respeito das competências iniciais

De maneira geral, as habilidades numéricas elementares evidenciadas no bebê podem ser divididas em três grandes categorias: a discriminação das numerosidades, a compreensão das relações quantitativas e, por fim, as capacidades aritméticas. A discriminação de numerosidades evoca a capacidade de diferenciar conjuntos unicamente com base no número de elementos que contêm. A compreensão das relações quantitativas baseia-se na capacidade de identificar qual de dois conjuntos contém mais ou menos elementos. Enfim, as capacidades aritméticas reagrupam o conjunto das aptidões que permitem compreender e antecipar o resultado de operações de acréscimos ou subtrações efetuadas numa determinada quantidade.

Um importante trabalho da pesquisa contemporânea consiste em descrever da melhor forma possível essas competências precoces não simbólicas. Posteriormente, ao longo do desenvolvimento nas sociedades que usam números, a criança reencontrará a aritmética simbólica por meio da linguagem e do comportamento dos adultos e ela lhe será ensinada mais tarde, de forma sistemática, na escola. Uma questão hoje importante e ainda mal resolvida diz respeito aos mecanismos que permitem a passagem da aritmética não simbólica à aritmética simbólica. Voltarei a esse ponto mais adiante.

#### A discriminação de numerosidades

A ideia de que as crianças percebem e são capazes de discriminar as numerosidades fundamenta-se num conjunto de experiências, entre as quais algumas muito antigas. Como os bebês não sabem falar, utiliza-se, para testá-los, o paradigma da habituação. O princípio desse paradigma baseiase numa tendência bem conhecida entre os pequenos: sua preferência visual pela novidade. No procedimento clássico, apresentam-se ao bebê, de forma repetitiva, conjuntos comportando n elementos, até que se evidencie uma diminuição do interesse da criança, que se manifesta por uma redução de seu tempo de fixação ocular. Nesse momento, o examinador apresenta um conjunto com um número diferente de elementos ( $n \pm i$ ). Se tal alteração provoca um redespertar do interesse, considera-se que a criança detectou uma diferença e que se trata da indicação de que a criança discriminou os dois conjuntos com base no número de elementos componentes, na medida em que as outras dimensões perceptíveis (superfície total, densidade, etc.) foram controladas. Mediante tal paradigma, Starkey e Cooper (1980) demonstraram que crianças de 4 a 6 meses são capazes de reagir a uma alteração de numerosidade (2 versus 3) de alinhamentos de pontos. Esse efeito foi reproduzido entre recém-nascidos (Antell & Keating, 1983) e com conjuntos de objetos idênticos ou heterogêneos (Strauss & Curtis, 1981) ou ainda figuras geométricas em movimento (Van Loosbroek & Smitsman, 1990). Demonstrou-se ainda que bebês de 6 meses podem discriminar numerosidades sequenciais como sequências de sons e que recém-nascidos são capazes de discriminar enunciados de duas versus três sílabas em modalidade auditiva (Bijeljac-Babic, Bertoncini & Mehler, 1991) ou ainda o número de saltos realizados por uma boneca (Wynn, 1996).

Os primeiros trabalhos mostraram, com regularidade, que apenas as pequenas numerosidades podiam ser discriminadas; mas foi a seguir demonstrado que as crianças eram capazes de discriminar numerosidades maiores, desde que a relação entre as numerosidades a comparar seja de certa amplitude. Por exemplo, Xe e Spelke (2000) demonstraram que crianças de 6 meses conseguem discriminar conjuntos de 8 *versus* 16 elementos (relação 1/2) mas não conjuntos de 8 *versus* 12 elementos (relação 2/3).

Essa capacidade de discriminação chegou a ser demonstrada nos paradigmas de emparelhamento intermodal. Por exemplo, numa experiência realizada por Jordan e Brannon (2006), crianças de 7 meses são expostas a cenas visuais dinâmicas nas quais há duas ou três mulheres, ao mesmo tempo em que ouvem duas ou três vozes pronunciarem a palavra "look". Os autores anotam o tempo que as crianças levam olhando a imagem visual numericamente correspondente ao número de vozes ouvidas. Observam que as crianças passam significativamente mais tempo olhando para o lado numericamente equivalente ao número de sons apresentados.

Uma experiência recente de Izard e suas colaboradoras demonstra também uma boa capacidade de emparelhamento intermodal, mas dessa vez em bebês (Izard, Sann, Spelke & Streri, 2009; Starkey, Spelke & Gelman, 1983, 1990); isso sugere que as crianças possuem uma representação numérica independente da modalidade de entrada. Por exemplo, na experiência realizada por Izard e suas colaboradoras, as crianças (com idade média de 49 horas) são a princípio familiarizadas com um número fixo de sílabas apresentadas em modalidade auditiva. A seguir, depois de dois minutos de familiarização, as crianças são expostas a quatro imagens que contêm seja o mesmo número, seja um número diferente de objetos. As crianças olham por mais tempo para a imagem que apresenta o mesmo número de objetos que a sequência de sons (4 versus 12). Uma segunda experiência mostra o mesmo resultado com 6 versus 18 objetos; mas, para uma relação de 4 versus 8, as crianças demonstram apenas uma preferência bastante discreta.

#### A compreensão das relações quantitativas

Trata-se aqui de determinar se a criança é sensível ao fato de que um conjunto contém mais ou menos elementos do que outro. As experiências que se interessam por esta questão começam em geral por uma fase de familiarização, no decorrer da qual as crianças são encorajadas a selecionar, entre dois conjuntos, aquele que contém o maior ou menor número de elementos. Tendo a criança realizado essa tarefa, é exposta a outras numerosidades e é então verificado se ela transfere a relação "maior" que aprendeu a dominar no primeiro conjunto. Uma transferência desse tipo foi observada desde a idade de dois anos e meio, manifestando a criança uma boa compreensão das relações de quantidade e reagindo corretamente perante novas numerosidades (Bullock & Gelman, 1977, 3 vs 4; Brannon & Van de Walle, 2001, 1 vs 3, 2 vs 3, 3 vs 4, 3 vs 5, 4 vs 5 e 4 vs 6).

Strauss e Curtir (1984) observaram também em crianças de 16 a 18 meses de idade o domínio da relação "maior". Nessa experiência, depois de terem sido condicionadas a indicar, entre dois conjuntos, o que contém o maior ou o menor número de pontos (por exemplo, 2 versus 3), as crianças são colocadas em situações de transferência implicando em pelo menos uma nova numerosidade. As crianças condicionadas a escolher "o maior" têm desempenhos superiores ao nível de acaso quando a situação de transferência implica numerosidades maiores (por exemplo, 3 vs 4, 4 vs 5), mas reagem aleatoriamente a numerosidades menores (por exemplo, 1 vs 2). Por outro lado, as crianças falham quando devem escolher "o menor". Assim, desde a idade de 16 meses, as crianças já parecem dispor de uma compreensão limitada da relação quantitativa "o maior".

Enfim, nos bebês, o procedimento de habituação permitiu demonstrar que eles detectavam a diferença entre sequências de conjuntos de numerosidade crescente (A < B < C) e decrescente (A > B > C) desde a idade de 11 meses, enquanto nenhuma detecção foi relatada aos 9 meses (Brannon, 2002). Evidencia-se, por exemplo, que aos 10-12 meses os bebês já manifestam uma preferência pela caixa que contém *o maior* número de biscoitos (1 *vs* 2, 2 *vs* 3 e 3 *vs* 6).

Em resumo, a compreensão das relações quantitativas não é inerente à estrutura das representações numéricas da criança. Embora seja precocemente capaz de discriminar numerosidades, somente depois de cerca de 1 ano ela distingue as diversas relações quantitativas. Segundo Cooper (1984), tal sensibilidade poderia emergir ao longo das primeiras interações com o ambiente e, em especial, quando o bebê constata o que se produz quando um objeto é acrescentado ou subtraído de um conjunto.

#### Capacidades aritméticas

Um terceiro tipo de competência atribuída ao bebê é a existência de capacidades aritméticas rudimentares que lhe permitem compreender e antecipar o resultado de operações de soma e subtração realizadas numa determinada quantidade. Tal aptidão foi evidenciada por Wynn (1992a), com o auxílio de um paradigma original denominado violação das expectativas. Numa primeira fase é apresentado ao bebê um pequeno conjunto de objetos num cenário (1 Mickey na condição "1 + 1" e 2 Mickeys na condição "2 - 1"). A seguir, uma tela se ergue e um objeto é acrescentado (condição "1 + 1") ou retirado de trás da tela (condição "2 - 1") atraindo

explicitamente a atenção da criança para essa operação. Enfim, a tela é baixada e revela seja um resultado possível (1 + 1 = 2 ou 2 - 1 = 1) seja um resultado impossível, considerando-se as transformações (1 + 1 = 1 ou 2 - 1 = 2). Observou-se que os bebês com 5 meses de idade olham significativamente por mais tempo para os resultados impossíveis do que para os resultados possíveis (Wynn, 1992a; Koechlin, Dehaene & Mehler, 1997; Simon, Hespos & Rochat, 1995) e isso ocorre mesmo quando os dois resultados revelados implicam numa alteração diante da situação inicial (1 + 1 = 2 ou 3), Wynn, 1992a), o que sugere que os bebês não esperam apenas uma alteração do número de objetos atrás da tela  $(1 + 1^{-1} 1)$  mas que antecipam exatamente o resultado final (1 + 1 = 2 e não 3). As reações de surpresa diante do resultado impossível não parecem ligadas à violação das expectativas relacionadas à localização dos objetos, pois os bebês reagem de maneira idêntica quando a localização dos objetos é tornada previsível pela utilização de uma plataforma giratória³ (Koechlin *et al*, 1997).

Tais resultados levaram Wynn (1992a) a concluir que os bebês são equipados com um sistema numérico inato que lhes permite calcular o resultado preciso de operações aritméticas aditivas e subtrativas.

Outros autores são mais cautelosos e pensam que as reações do bebê refletem o funcionamento de mecanismos mais primitivos do que os postulados por Wynn. Para explicar tais comportamentos, uns se valem das capacidades de representação mental e outros evocam uma preferência conjunta pela familiaridade e pela complexidade dos estímulos.

Essa última hipótese, entretanto, foi invalidada por um estudo recente no qual os aspectos metodológicos associados à familiaridade dos estímulos nesse tipo de paradigma foram controlados pela utilização de estímulos visoauditivos (Kobayashi, Hiraki, Mugitani e Hasegawa, 2004). Nesse estudo, pequenas estatuetas associadas a um determinado som de impacto são apresentadas em diferentes situações auditivas. Uma estatueta é, de início, colocada no palco, antes de ser escondida atrás da tela. O bebê ouve a seguir um ou dois sons de impacto. Depois, a tela desce e revela duas ou três estatuetas. Os bebês de 5 meses fitam por mais tempo os resultados aritmeticamente impossíveis (1 estatueta + 1 som = 3 estatuetas ou 1 estatueta) do que os resultados possíveis (1 estatueta + 1 som = 2 estatuetas ou 1 estatueta + 2 sons = 3 estatuetas).

<sup>3</sup> Unicamente na situação subtrativa. Na condição aditiva, os bebês não olham por mais tempo para o resultado impossível, mesmo quando os objetos são estáticos.

Em resumo, diversos autores defendem a ideia de que os bebês são capazes de calcular o resultado preciso de pequenas adições e subtrações (Kobayashi et al, 2004; Wynn, 1992a, 1995), mas tal interpretação não é partilhada por todos. Para alguns, as observações feitas com bebês devem ser consideradas com muita precaução, pois os dados são frágeis, inconsistentes e em desacordo com os dados coletados com crianças mais velhas. Em modalidade visual, as interações complexas entre os diferentes tipos de preferências do bebê em relação à familiaridade/ novidade/complexidade são suscetíveis de modular fortemente os padrões de fixação ocular e não devem ser negligenciados. Para outros autores, as reações dos bebês estão ligadas a processos muito menos sofisticados do que o cálculo exato. O paradigma de violação das expectativas poderia simplesmente mobilizar capacidades de representação mental. No último caso, tais representações seriam afetadas pelo número de aparições necessárias, e seriam reforçadas pela presença de índices perceptivos diretos.

#### Interpretação dos dados

Tais dados levaram os autores a postular a existência de dois sistemas numéricos partilhados pela criança, pelo homem adulto e por diversas espécies animais, e que estariam na origem de nossas competências numéricas ulteriores: um sistema para a representação aproximativa de grandes numerosidades e um sistema para a representação precisa de pequenas numerosidades. Postulouse a hipótese de que esses dois sistemas constituem a base de nossas intuições numéricas sobre as quais, a seguir, elaboram-se os conceitos numéricos mais sofisticados e próprios à espécie humana.

Esses dois sistemas numéricos pré-simbólicos distinguem-se por suas propriedades e pela extensão numérica sobre a qual se sustentam.

#### O primeiro sistema: aproximativo destinado aos grandes números

Este sistema permite a distinção entre grandes numerosidades, desde que se encontrem numa determinada relação, e os estudos sobre o desenvolvimento infantil demonstram que tal relação evolui com a idade.

As crianças de 6 meses distinguem 8 *versus* 16 mas não 8 *versus* 12; a relação com que conseguem lidar é de 1/2 mas não de 2/3 (Xu & Spelke, 2000). Aos 10 meses, a distinção evolui e a relação 2/3 é percebida. Enfim,

nos adultos, a discriminação atinge relações tão pequenas quanto 7 *versus* 10 (Barth, Kanwisher & Spelke, 2003; Van Offelen & Vos, 1982). Foi, aliás, demonstrado que, em tarefas de discriminação, conforme a proporção, as crianças não aplicam tais relações em pequenas numerosidades: não são capazes de discriminar 1 *versus* 2, 2 *versus* 3 e mesmo 2 *versus* 4 (Xu, 2003). Essas capacidades, como já indicado, aplicam-se a outras modalidades (por exemplo, em audição: Lipton & Spelke, 2003, 2004) e mesmo a emparelhamentos multimodais.

O sistema numérico aproximativo caracteriza-se por três efeitos principais, abundantemente descritos na literatura. *O efeito de distância*, observado nas tarefas de comparação numérica, designa a modulação dos desempenhos e termos de velocidade e precisão pela distância numérica entre os números. Dois números são comparados com maior rapidez e menor probabilidade de erro quando são numericamente distantes (por exemplo, 2 – 7 *versus* 2 – 3) (Moyer & Landauer, 1967).

O efeito de tamanho corresponde à diminuição dos desempenhos com o aumento do valor dos números com que se lida. Numa tarefa de comparação numérica, as respostas são mais lentas e mais vezes incorretas para números de maior valor (por exemplo, 21 - 25) do que para números de pequeno valor (por exemplo 5 - 9), quando é determinada a distância entre tais números (por exemplo, Buckley & Gilman, 1974). Numa tarefa de estimativa numérica, a variabilidade das estimativas aumenta linearmente com a magnitude do número a ser estimado (por exemplo, Whalen, Gallistel & Gelman, 1999).

O efeito SNARC (de Spatial-Numerical Association of Response Code) corresponde ao fato de que, numa tarefa em que o sujeito pode reagir ora à esquerda ora à direita, ele reage mais depressa aos pequenos números do lado esquerdo e aos grandes números do lado direito. Tal efeito sugere uma associação automática entre a representação mental dos números e uma organização espacial da esquerda para a direita. Diversos modelos foram propostos para exemplificar essa competência e esses efeitos especiais, e a ideia central é que os números são representados sob a forma de uma magnitude aproximativa. Depois de Restle (1970), Dehaene (1992) sugeriu que as quantidades numéricas são representadas de forma aproximativa sob a forma de um *continuum* chamado de *linha numérica mental*.

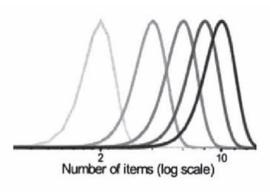


Figura 1. Representação esquemática da linha numérica com compressão logarítmica (Nieder & Miller. 2003).

Essa linha seria comprimida na região dos grandes números (Dehaene, 2003). Entre uma tentativa e outra, uma numerosidade seria representada mentalmente por valores aproximativos que tendem a se reagrupar em torno de seu valor logarítmico. A linha numérica mental é um sistema de codificação da posição: cada número é representado por um segmento de linha numérica que não inclui o conjunto dos segmentos correspondendo aos números a ele inferiores.

Essa representação analógica seria independente da linguagem e biologicamente determinada. Seu substrato cerebral se situaria ao nível do segmento horizontal do sulco intraparietal (ver Dehaene, Piazza, Pinel & Cohen, 2003, para uma revisão da literatura). Nesse modelo, o efeito de distância se explica pela superposição das distribuições de ativação. Quanto mais próximos os números, mais as distribuições de ativações que os representam se superporiam e mais difícil seria sua discriminação (Fig. 1). O efeito de tamanho se explica pela compressão logarítmica. Para uma dada distância numérica, a superposição das distribuições de ativação seria mais importante para os grandes números do que para os pequenos números (Fig. 1). A discriminação dos grandes números seria, por conseguinte, mais difícil do que a discriminação dos pequenos números. O efeito SNARC se explica pela orientação da linha numérica mental. Os pequenos números seriam representados à esquerda, e os grandes números à direita.

#### O segundo sistema: preciso, mas limitado aos pequenos números

O segundo sistema é um sistema de representação discreta e precisa das pequenas numerosidades.

Na verdade, tal sistema praticamente não iria além de 3. Numa experiência realizada com crianças de 10 a 12 meses, coloca-se diante da criança uma bala numa caixa e duas em outra e observa-se que, a seguir, a criança escolhe a maior quantidade. Isso ocorre também com 2 versus 3 ou 1 versus 3. Mas, por outro lado, para 2 versus 4 ou 3 versus 4, ou mesmo para 1 versus 4, a escolha torna-se aleatória. Esse padrão de comportamento é bem diferente do observado com o sistema aproximativo, pois aqui o limite é o número 3 e não pode ser ultrapassado (Feigenson, Carey & Hauser, 2002). Tais efeitos foram também encontrados em outras situações: nos casos da procura de um objeto numa caixa, as crianças continuaram a procurar até encontrarem o número exato de objetos quando há 1, 2 ou 3, mas param depois de encontrarem um com 4 objetos (Feigenson & Carey, 2003).

Uma questão central em inúmeros debates é saber que sistema serve de base após o desenvolvimento da aritmética simbólica. Essa questão ainda não está resolvida. Para alguns autores, a representação aproximativa é a única representação semântica dos números, e a aritmética simbólica se desenvolveria através de um emparelhamento com essa representação contínua (Dehaene, 1992; Dehaene & Cohen, 1995, 1997; Gallistel & Gelman, 1992).

Há dois argumentos principais em favor dessa hipótese. O primeiro é de ordem comportamental; os três efeitos característicos da representação aproximativa da numerosidade se encontram quando se manipulam números simbólicos: efeito de tamanho, de distância e do lado de reação (SNARC). O segundo argumento é de ordem do desenvolvimento: foi demonstrado, com jovens de 14 anos, que dificuldades nas tarefas de discriminação numéricas não simbólicas correlacionavam-se com o nível matemático desses jovens, avaliado diversos anos antes (Halberda, Mazzocco & Feigenson, 2008). Entretanto, considerando-se o caráter retrospectivo desse estudo, não é possível determinar se é a precisão do sistema não simbólico que influencia o desenvolvimento do sistema simbólico ou se, ao contrário, é o domínio do sistema simbólico que intensifica a precisão do sistema aproximativo. Tais dificuldades foram há pouco tempo superadas por estudos prospectivos recentes que enfatizam

a existência de uma relação positiva entre as representações aproximativas e o desenvolvimento matemático ulterior. Por exemplo, num estudo longitudinal, De Smedt, Verschaffel & Ghesquière (2009) demonstraram que o tamanho do efeito de distância (medido pelo tempo de reação das crianças) no início de sua escolaridade primária seria um bom prognosticador de suas notas em matemática um ano depois, verificandose o mesmo quando o controle é realizado pelo efeito da idade, do nível intelectual e da velocidade das percepções. Outra relação positiva foi também encontrada entre o desempenho das crianças de 5 e 6 anos em adições não simbólicas de grandes números no início do primeiro ano primário e suas notas em matemática no fim daquele ano, sendo nesse estudo mantida a relação mesmo quando se neutraliza o papel eventual da leitura e do nível intelectual (Gilmore, McCarthy & Spelke, 2007).

Pergunta-se, entretanto, se as crianças devem apenas aprender a associar os símbolos numéricos à representação aproximativa das quantidades, porque às vezes o mesmo período de tempo transcorre entre o momento em que a criança é capaz de dominar a sequência dos números e aquele em que compreende seu significado numérico preciso (Fayol e Seron, 2005). Parece também curioso propor que um sistema aproximativo para os grandes números sirva de base para o domínio preciso dos pequenos números. Por essas razões, outros autores postularam que na origem da aritmética simbólica se encontraria o sistema numérico preciso para as pequenas quantidades. Esse sistema limita-se a princípio a três itens ou três acontecimentos, mas poderia ser um precursor mais poderoso do que o sistema aproximativo, por pelo menos duas razões principais. Em primeiro lugar porque, enquanto o sistema dedicado aos grandes números é aproximativo, o sistema para os pequenos números é preciso: ele fornece uma individuação exata da numerosidade, o que é também o caso das representações simbólicas. Em segundo porque, ao criar uma representação simbólica de cada nova entidade, esse sistema comporta uma representação natural da operação de adição +1 que, em dado momento, poderá ser colocado em correspondência com a relação de sucessão presente na contagem verbal.

Poderemos, entretanto, observar que nem a representação aproximativa nem a representação precisa são suficientes para compreender o surgimento das competências numéricas. Num dado momento, a criança deve descobrir uma analogia entre a ordem das palavras na contagem verbal e a ordem das quantidades nos conjuntos

numéricos. Deve descobrir que o valor cardinal de um conjunto é determinado pela sua posição na lista e que os nomes de número se sucedem segundo valores "+1". Para cada número n na lista, o valor do seguinte é n+1. Tal conhecimento não está presente nem no sistema de individuação preciso nem na representação numérica aproximativa. A descoberta da função de sucessão se faz, provavelmente, por indução, a partir do conhecimento das numerosidades um, dois, três e quatro (Sarnecka e Carey, 2008).

#### 3. Os modelos neuronais

Se o ser humano dispõe de uma aparelhagem biológica que lhe permite compreender os números, então tal dispositivo deve estar presente em todos os membros da espécie (argumento de universalidade), existir pelo menos em estado embrionário em outras espécies animais, sobretudo naquelas estreitamente aparentadas à nossa (argumento evolucionista), manifestar-se precocemente na criança pequena (argumento inatista) e situar-se sobre um substrato neuronal predeterminado (argumento da pré-conexão neurológica). A hipótese de que nossa espécie é dotada de um sistema protonumérico inato resulta, assim, no postulado de que essa função biológica se realiza numa estrutura cerebral possuidora das propriedades funcionais necessárias para sustentar tal função. Antes da aquisição das competências aritméticas simbólicas, postula-se portanto a existência, no sistema nervoso central, de uma estrutura suscetível de propiciar a representação das numerosidades, assim como existem estruturas capazes de representar a forma dos objetos ou as cores.

Duas linhas de pesquisa foram desenvolvidas em relação a esse tema. A primeira e mais antiga apoia-se em dados patológicos e consiste em averiguar se lesões acidentais e seletivas de determinadas partes do sistema nervoso central provocam uma alteração específica de nossas habilidades numéricas (Seron, 2002). A segunda, mais recente, oriunda de trabalhos com imagens cerebrais funcionais, consiste em averiguar que estruturas cerebrais são seletivamente ativadas em sujeitos normais quando eles se encontram engajados em tarefas numéricas.

Do lado das pesquisas em patologia, sabe-se desde 1940 que uma lesão localizada no córtex parietal esquerdo à altura do giro angular e do giro supramarginal pode provocar déficits numéricos especialmente graves (acalculia) (Gerstmann, 1940). Num caso célebre, recentemente descrito por uma equipe de pesquisadores ingleses e italianos, a paciente, uma exhoteleira bastante habituada com a manipulação dos números antes de sua lesão cerebral, torna-se incapaz de realizar qualquer operação numérica que vá além do número 4 (Cipolotti, Butterworth & Denes, 1991).

Posteriormente, os trabalhos oriundos da neuroimagem funcional obtida por scanner (*PET scan*) ou pela ressonância magnética (*IRMf*) e os trabalhos conduzidos com a estimulação magnética transcraniana (*TMS*) vão, por sua vez, sublinhar a importância das estruturas parietais posteriores, salientando também que as atividades numéricas mobilizam de fato um conjunto mais diversificado de estruturas corticais e subcorticais.

No que diz respeito, entretanto, ao núcleo da cognição numérica - a saber, a representação das numerosidades e dos números -, os modelos neuronais atuais propõem a existência de pelo menos duas representações diferentes. Uma representação sensível à quantidade de informações apresentadas (number sensitive) e uma representação que codifica especificamente determinadas numerosidades (number selective). Num modelo recente que retoma a ideia de uma linha numérica, Dehaene e Changeux (1993) propuseram uma rede neuronal que trata as numerosidades relativas à informação visual em quatro camadas distintas: (1) o mapa retiniano, (2) o mapa de localização, (3) a codificação por adição e (4) a codificação posicional. O mapa retiniano representa os objetos tais como são percebidos pelo sujeito. O mapa de localização representa os objetos segundo sua localização mas independentemente de seu tamanho, opera-se então um processo de normalização. Esse mapa faz projeção sobre uma camada que adiciona as ativações do mapa de localização (codificação por adição), essa ativação é portanto proporcional à numerosidade. Enfim, a camada de codificação por adição faz projeção sobre os detectores de numerosidade (4) (codificação posicional). Esses detectores são ativados se a correspondente unidade de adição for ativada e se as unidades representando as numerosidades não o forem.

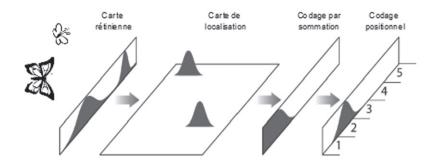


Figura 2. Modelo neuronal de Dehaene e Changeux. A localização é codificada independentemente do tamanho. As ativações do mapa de localização são a seguir somadas e a ativação corresponde então à numerosidade presente. Enfim, o mapa de adição projetase sobre um mapa cujas unidades reagem seletivamente a diferentes numerosidades (adaptado de Nieder & Dehaene, 2009).

A hipótese de uma dupla codificação, uma intensiva e outra seletiva, dispõe, por outro lado, de elementos de confirmação em nível neuronal. Roitman, Brannon e Platt (2007) registraram entre os macacos uma população de neurônios, no sulco lateral interparietal, que codificam o número total de elementos presentes de forma contínua ao longo de uma gama extensa de valores (2 a 32). As respostas desses neurônios assemelham-se ao funcionamento da codificação por adição postulada no modelo de Verguts e Fias e no de Dehaene e Changeux. A existência de neurônios que codificam para numerosidades seletivas foi também observado no cérebro de primatas não humanos. Numa experiência em que os macacos são levados a decidir se duas numerosidades apresentadas em momentos diferentes (*delayed matching task*) são idênticas ou não, Nieder e seus colaboradores observaram a existência de neurônios que descarregam de forma seletiva para uma numerosidade específica.

É interessante observar que esses autores demonstraram também que, quando um neurônio codifica para uma dada numerosidade, ele também descarrega, mas com menos força, para as numerosidades que ficam próximas. Por outro lado, as propriedades funcionais desses neurônios podem evidenciar o efeito de distância, pois os neurônios que possuem uma especificidade para numerosidades próximas têm curvas de descarga que se aplicam mais, por comparação, às dos neurônios que têm uma seletividade para numerosidades distantes. Enfim, e desta vez de acordo com o efeito de tamanho, os neurônios com especificidade para valores numéricos elevados têm uma curva de

descarga mais extensa do que os possuidores de uma seletividade para valores numéricos fracos (Nieder, Freedman & Miller, 2002; Nieder & Miller, 2003, 2004ab).

No sujeito adulto humano, os dados de neuroimagem sugerem também a existência de neurônios sensíveis a uma quantidade específica e localizados bilateralmente no sulco intraparietal (Piazza, Izard, Pinel, Le Bihan & Dehaene, 2004; Santens, Roggeman, Fias & Verguts, 2010). Nessa experiência, que se baseia na lógica da habituação, apresenta-se ao sujeito uma sequência de estímulos contendo a mesma numerosidade (n1). A seguir, muda-se de forma brusca seja a numerosidade (n2), seja a forma dos objetos, e espera-se um efeito rebote (rebound effect). Nesse paradigma, supõe-se na verdade que, durante a apresentação em repetição da mesma numerosidade n1, os neurônios sensíveis a essa numerosidade n1 acabem por ser saturados e portanto não mais descarregar; quando da mudança de numerosidade (apresentação da numerosidade 2), espera-se que os neurônios sensíveis a essa nova numerosidade comecem a descarregar conforme um gradiente de intensidade igual à diferença entre n1 – n2. Tal efeito de adaptação, que segue a lei de Weber-Fechner, foi observado para numerosidades (conjunto de pontos), mas também para quantidades apresentadas sob a forma de códigos simbólicos (Piazza, Pinel, Le Bihan & Dehaene, 2007). Finalmente, num estudo recente analisando a conectividade entre diferentes regiões cerebrais, Santens e seus colaboradores confirmaram a existência, no humano, de dois sistemas de codificação das numerosidades. Um primeiro sistema intensivo sensível à quantidade de elementos presentes estaria situado na parte posterior do sulco intraparietal, enquanto uma segunda região, mais anterior no sulco intraparietal, procederia a uma codificação seletiva (number selective) (Santens, Roggemans, Fias & Verguts, 2009). Também é interessante ver que uma análise da conectividade cerebral sugere que, na apresentação de uma numerosidade não simbólica (um padrão de pontos), a via da codificação intensiva é utilizada antes de se chegar à codificação seletiva, enquanto na apresentação de numerosidades simbólicas haveria um acesso direto ao subsistema sensível às numerosidades seletivas.

Ao lado das estruturas cerebrais responsáveis pela representação, numerosidades de outras estruturas cerebrais intervêm na aritmética simbólica. Mas observaremos que foi demonstrado que, quando se trata de numerosidades simbólicas, há igualmente ativações ao nível do *IPS*, mas sua codificação no *IPS* à esquerda é mais precisa em relação à codificação de numerosidades não simbólicas. O fato de que o tratamento semântico das numerosidades simbólicas ativa estruturas idênticas às ativadas pelo tratamento semântico das numerosidades não simbólicas foi sem dúvida utilizado como argumento em favor da ideia de que nossas competências numéricas inatas servem de base para o desenvolvimento da aritmética simbólica (Dehaene, 2009).

No que concerne à recuperação dos fatos aritméticos (tabuadas de multiplicação e adições simples), evidenciaram-se ativações do giro angular, e considera-se que essa estrutura exerce um papel na recuperação em memória dos fatos aritméticos. De forma bastante interessante, foi também demonstrado que, quando adultos aprendem novos fatos aritméticos fora da idade usual de aprendizagem, há a intervenção de uma ampla rede comportando regiões frontais e parietais, mas, ao longo da automatização, as ativações diminuem nas áreas frontal e parietal superior para se focalizarem no giro angular. Essa diminuição das ativações frontais corresponde a uma diminuição das demandas em recursos de tratamento na memória de trabalho.

Os dados atuais convergem então para enfatizar que o tratamento dos números fundamenta-se sobre circuitos cerebrais específicos para o tratamento dos números e para o cálculo (Ansari, 2008; Dehaene, 2009; Zammarian, Ischebeck & Delazer, 2009). Essa capacidade sustenta-se sobre uma rede que envolve estruturas parietais, frontais e cingulares, com um papel especialmente importante atribuído às regiões parietais (Chochon, Cohen, van de Moortele & Dehaene, 1999; Dehaene, Spelke, Pinel, Stanescu & Tsivkin, 1999; Fias, Lammertyn, Reynvoet, Dupont & Orban, 2003; Gruber, Indefrey, Steinmetz & Kleinschmidt, 2001; Lee, 2000; Menon, Rivera, White, Glover & Reiss, 2000; Pesenti, Thioux, Seron & De Volder, 2000; Pinel, Dehaene, Riviere & Le Bihan, 2001; Rickard, Romero, Basso, Wharton, Flitman & Grafman, 2000; Simon, Mangin, Cohen, Le Bihan & Dehaene, 2002; Stanescu-Cosson, Pinel, van De Moortele, Le Bihan, Cohen & Dehaene, 2000; Zago, Pesenti, Mellet, Crivello, Mazoyer & Tzourio-Mazoyer, 2001).

Uma questão primordial das pesquisas atuais consiste em questionar por que a representação dos números vai se alojar no núcleo dessa estrutura cerebral em particular. Diversas proposições teóricas

competem entre si. O córtex parietal superior é, na verdade, igualmente ativado em outras atividades - como a de segurar ou apontar objetos, alguns movimentos do olhar, a orientação espacial da atenção e mesmo mecanismos mais gerais de atenção e seleção da resposta (Shuman & Kanwhisher, 2004). Foi também demonstrado que o IPS é ativado por ocasião do tratamento de outras magnitudes - como o tamanho dos objetos, a localização, as variações de ângulos e a luminosidade (Cohen Kadosh & Henik, 2006; Fias, Lammertyn, Reynvoet, Dupont & Orban, 2003; Kaufmann et al, 2005; Pinel, Piazza, Le Bihan & Dehaene, 2004; Zago, Petit, Tuberlin, Anderson, Vigneau & Tzourio-Mazoyer, 2008). E, embora algumas estruturas parietais sejam mais ativadas pela numerosidade do que por outras dimensões, há uma superposição considerável das ativações entre o tratamento do tamanho e da numerosidade (Kaufmann, Koppelstaetter, Delazer, Siedentopf, Rhomberg, Golaszewski et al, 2005; Pinel et al, 2004) e entre o tratamento dos números e o de localizações espaciais (Zago et al, 2008).

Tais superposições deram margem a diferentes interpretações. Segundo Dehaene, o sistema neuronal que trata da numerosidade estaria parcialmente superposto a outros sistemas funcionais, mas guardaria certa independência funcional (Dehaene, 2009), enquanto um autor como Walsh sugere que o IPS é a sede de um sistema geral de tratamento da magnitude do tempo (ATOM: A Theory of Magnitude), do espaço e das numerosidades (Walsh, 2003), que tal sistema exerce um papel chave no controle da ação que requer o cálculo preciso do tamanho, da localização e do número de objetos presentes no ambiente (Andres, Olivier e Badets, 2008). Outros sugerem que o lobo parietal poderia abrigar mecanismos de tratamento da ordem, o que é, sem dúvida, uma dimensão importante da numerosidade quando ela se exprime sob a forma da linguagem ou resulta de operações de contagem. Um estudo recente em IRMf demonstrou que as ordens numéricas e não numéricas (como as letras e os meses do ano) ativam uma região na parte anterior do IPS (Fias, Lammertyn, Caessens & Orban, 2007). Tais observações se harmonizam com outros dados que sugerem que o IPS exerce um papel crucial da memória de trabalho na retenção da ordem dos itens (Marshuetz, Reuter-Lorenz, Smith, Jonides & Noll, 2006; Marshuetz & Smith, 2006). Entretanto, há dados que sugerem haver diferenças entre o tratamento da ordem

e da numerosidade. Isso foi ressaltado pela observação de duplas dissociações entre o tratamento da ordem e da numerosidade em pacientes com lesão cerebral apresentando síndrome de Gertsmann (Delazer & Butterworth, 1997; Turconi & Seron, 2002) e também em sujeitos normais através de técnicas eletrofisiológicas (Turconi, Campbell & Seron, 2006; Turconi, Jemel, Rossion & Seron, 2004).

Não examinaremos em detalhe todas essas hipóteses, mas descreveremos alguns dados que sugeriram laços estreitos entre os números e o espaço e entre os números e os dedos.

# 4. Número e espaço

O elo mais evidente entre os números e o espaço foi observado numa tarefa de julgamento de paridade. Quando é pedido a um sujeito que decida se um número apresentado em visão central sobre uma tela é par ou impar, observa-se que ele reage mais depressa do lado esquerdo quando o número é pequeno e mais depressa do lado direito quando o número é grande. Esse efeito foi chamado por Dehaene de efeito SNARC, de "Spatial Number Association of Response Codes" (Dehaene, Bossini & Giraux, 1993; Dehaene, Dupoux & Mehler, 1990). Essa associação espacial entre o tamanho dos números e o lado de resposta foi encontrada em inúmeras situações experimentais. Por exemplo, numa tarefa de atenção, em que o sujeito deve responder a estímulos que aparecem aleatoriamente à esquerda ou à direita, demonstrou-se que, se o estímulo é precedido por um número apresentado de forma subliminar em visão central, os pequenos números desencadeiam um acréscimo da atenção do lado esquerdo (o que se traduz por uma redução do tempo de reação) e os grandes números provocam uma orientação da atenção do lado direito (Fischer, Castel, Dodd & Pratt, 2003). Reações semelhantes também foram observadas em pacientes heminegligentes<sup>4</sup> numa tarefa de bisseção numérica. Quando é pedido a esses pacientes que indiquem o mais depressa possível e sem calcular o meio de um intervalo numérico, por exemplo, qual o número do meio entre 12 e 19, eles tenderiam a responder 17, como se negligenciassem a parte

<sup>4 [</sup>N.E.]Do francês héminégligent. A heminegligência é um distúrbio neurológico que afeta indivíduos em decorrência de uma lesão parietal em um dos hemisférios cerebrais, geralmente o direito. O indivíduo heminegligente passa a ignorar sensorialmente tudo o que se passa no lado oposto à lesão.

esquerda de sua linha numérica mental (Zorzi, Priftis & Umilta, 2002). Alguns sujeitos normais indicam também perceber mentalmente os números sob a forma de uma linha interna e, num número considerável de casos, essa representação interna é também orientada da esquerda para a direita (Seron, Pesenti, Noël, Deloche & Cornet, 1992).

Tais efeitos espaciais foram interpretados no contexto das superposições neurofuncionais no núcleo do sulco intraparietal (Hubbard, Piazza, Pinel & Dehaene, 2005). A interpretação inicial desse efeito foi, como já vimos, de que os números são representados sobre uma linha numérica orientada da esquerda para a direita e comprimida na região dos grandes números, o viés espacial resultando então de uma compatibilidade espacial entre a localização do número em sua linha numérica e o lado de resposta (Hubbard *et al*, 2005). Foi ainda sugerido que essa orientação estaria ligada a nossos hábitos de leitura e observado que o viés estaria reduzido em sujeitos que tivessem aprendido a ler da direita para a esquerda (Dehaene *et al*, 1993).

A ideia de uma representação espacial a longo prazo acessada automaticamente em todas as situações que requeiram o tratamento de numerosidades foi, porém, questionada pela observação de variações contextuais. Por exemplo, quando, numa tarefa envolvendo tratamentos numéricos, pede-se aos sujeitos que representem os números como horas no mostrador de um relógio, uma relação inversa é observada entre o tamanho e o lado de resposta (Bachtold, Baumuller & Brugger, 1998). Por outro lado, se o dispositivo de resposta é orientado verticalmente, observa-se um viés de natureza diferente, com os pequenos números tratados mais rapidamente pela resposta-chave situada embaixo e os grandes números pela chave situada ao alto (Gevers, Lammertyn, Notebaert, Verguts & Fias, 2006). Além disso, em sujeitos bilíngues utilizando línguas escritas com diferentes orientações, diversos efeitos foram observados. Por exemplo, Shaki e Fischer (2008) demonstraram que a leitura de um texto em hebraico ou em cirílico, 10 minutos antes de se proceder a uma tarefa de julgamento de paridade, influencia a amplidão do viés espacial. Os sujeitos bilíngues evidenciam na verdade um SNARC clássico depois da leitura de um texto curto em cirílico (leitura da esquerda para a direita), mas esse viés desaparece ou diminui sensivelmente após a leitura de um texto em hebraico (lido da direita para a esquerda). Na verdade, os mesmos autores demonstraram que a leitura de uma única palavra em cirílico ou em hebraico imediatamente antes de um julgamento de paridade é suficiente para alterar a direção do efeito SNARC. Esses dados sugerem que há grande flexibilidade nos vieses espaciais e que o SNARC não depende necessariamente de representações fixas a longo prazo, mas poderia corresponder a uma estruturação espacial gerada na memória a curto prazo, em função das restrições e especificidades da tarefa (Fisher, Shaki & Cruise, 2009) e dos sistemas de notação empregados (Hung, Hung, Tzeng e Wu, 2008; Fias & Fischer, 2005; Fisher, 2006; Seron & Pesenti, 2001). Enfim, alguns autores propuseram ainda que o efeito SNARC (mas de menor amplitude) foi também observado para ordens não numéricas, como as letras do alfabeto (Gevers, Reynvoet & Fias, 2003; 2004).

### 5. Números, movimentos dos dedos e das mãos

O fato de que o lobo parietal abriga a representação semântica dos números despertou também o interesse pela relação bem conhecida entre os números, a aritmética e os dedos. Essa associação tem sido, há muitos anos, objeto de observações em psicologia do desenvolvimento, que demonstraram que as crianças utilizam os dedos para contar, para indicar objetos e como apoio das primeiras operações aritméticas de soma e subtração (Fuson, 1988; Gelman & Gallistel, 1978). Em alguns idiomas, o nome dos pequenos números deriva diretamente do nome do dedo correspondente (Butterworth, 1999). Durante vários séculos, diversos procedimentos de cálculo foram descritos a partir de um uso sistemático dos dedos para a soma e a subtração, mas também para as multiplicações. Por outro lado, pode-se pensar que o uso de um sistema de base-10 esteja ligado ao número de nossos dedos. Enfim, em neuropsicologia, foi descrito o caso de pacientes que se tornaram acalcúlicos após uma lesão cerebral e que, ao mesmo tempo, apresentam agnosia digital (síndrome de Gertsmann) (Cipolotti, Butterworth & Denes, 1991; Gertsmann, 1930, 1957; Mayer et al, 1999).

A localização central do *IPS* no interior do lobo parietal e suas conexões fortes com as regiões adjacentes resulta numa oportunidade especial para a criação de associações entre os números e outros movimentos orientados dos dedos e das mãos. Pesquisas efetuadas na Universidade Católica de Louvain (UCL), na Bélgica, evidenciaram inúmeras interações entre os números e os movimentos dos dedos e das mãos. Por exemplo, Andres, Davare, Pesenti, Olivier e Seron (2004)

demonstraram que o tratamento do tamanho dos números interfere na velocidade de abertura e fechamento dos dedos para segurar um objeto: os sujeitos fecham mais depressa a pinça digital quando expostos a um pequeno número e abrem-na mais rapidamente quando confrontados com um grande número. Os mesmos efeitos foram observados nas tarefas de segurar objetos, quando foi demonstrado que a amplitude da abertura da pinça digital é influenciada pelo tamanho do número (não pertinente para a tarefa) (Andres, Ostry, Nicol & Paus, 2008). A influência do tamanho do número também foi observada quando os sujeitos não devem realizar uma ação, mas apenas imaginá-la para decidir se ela é possível ou não (Badets, Andres, Di Luca & Pesenti, 2007). Enfim, num estudo recente, Badets e Pesenti (2010) observaram uma relação inversa entre a ação e os números: quando um sujeito vê uma mão se fechar, ele tem maior dificuldade para lidar com grandes números, e o processo se inverte em relação aos pequenos. De forma interessante, essa interação só é observada para os movimentos biológicos. Tais observações sugerem a existência de relações estreitas entre os processos que calculam o tamanho da pinça digital e os que avaliam a numerosidade, e se encaixam bem na teoria de Walsh sobre o papel das estruturas parietais na avaliação geral das magnitudes.

Ao lado desses dados sobre a preensão manual (*grasping*), há outras evidências a favor de relações estreitas entre os dedos e os números. No nível desenvolvimental, diversos estudos sublinharam a existência de relações bidirecionais entre uma alteração das gnoses digitais e a presença de discalculia desenvolvimental (Kinsbourne & Warrington, 1962; 1963; Rourke, 1993; Strauss & Werner, 1938; Pebenito, 1987). Num estudo longitudinal, Fayol, Barrouillet e Marinthe (1998) demonstraram que o nível de desempenho perceptivo-táctil de crianças com 5 anos de idade era um melhor prognosticador de seu nível de desenvolvimento aritmético medido aos 6 e aos 8 anos do que o índice de desenvolvimento intelectual geral (ver também Noël, 2005). Tais resultados sugerem a existência de um elo entre as habilidades manuais perceptivo-tácteis e a capacidade de manipular as numerosidades.

Alguns trabalhos recentes sugerem igualmente que tais ligações entre os dedos e os números continuam presentes nos sujeitos adultos, mesmo que eles não utilizem com frequência os dedos na vida cotidiana. Em experiências recentes, Di Luca e seus colaboradores demonstraram

que quando os sujeitos, usando o teclado de um computador, respondem aos números arábicos de 1 a 10 utilizando para cada número um dedo diferente, eles reagem mais depressa quando os números atribuídos aos diferentes dedos correspondem à estratégia habitual de contagem nos dedos (Di Luca, Grana, Semenza, Seron & Pesenti, 2006).

Os dedos são também utilizados para comunicar a quantidade e, em culturas diversas, determinadas configurações de dedos levantados são as mais utilizadas e são configurações canônicas. Em diferentes trabalhos, Di Luca e seus colaboradores demonstraram que as configurações canônicas são denominadas mais rapidamente do que configurações não canônicas (Di Luca, Lefevre & Pesenti, 2010; Di Luca & Pesenti, 2008), o que foi também observado em crianças em idade a partir de 6 anos (Noël, 2005). Di Luca e Pesenti (2008) demonstraram também que configurações canônicas podem exercer um papel de indexação semântica e dispõem, portanto, de representações semânticas na memória de longo prazo.

Entretanto, a importância dessa ligação entre dedos e números ainda deve ser esclarecida. Se é evidente que os dedos intervêm em graus diversos nas atividades numéricas e aritméticas para apoiar a contagem verbal ou substituí-la, para apontar elementos a serem contados, para indicar uma quantidade e para acompanhar operações simples de adição e subtração, a importância funcional dessas atividades continua a ser objeto de discussão. Se alguns autores - como, por exemplo, Fisher, Pesenti e Butterworth - insistem na importância dos dedos, outros consideram que eles têm sobretudo um papel de apoio à memória de trabalho e que esse instrumento muito útil não é, contudo, indispensável. Dados recentemente coletados por Crollen e seus colaboradores apontam, aliás, nessa direção (Crollen, Mahe, Collignon & Seron, 2011). Esses autores demonstraram de fato que crianças cegas de nascença (1) usam os dedos pouco espontaneamente e com pouca frequência, (2) que, quando o fazem, é através de configurações não canônicas. Assim, os dedos sem dúvida constituem um instrumento útil e eficaz para determinadas tarefas numéricas, mas é sem dúvida possível dispensá-los.

# À guisa de conclusão

As pesquisas recentes em neurociência sugerem que somos equipados desde pouco tempo após o nascimento com redes neuronais que nos permitem realizar alguns tratamentos numéricos, como discriminar numerosidades, compará-las e também antecipar os resultados de operações simples de somas e subtrações. Tais competências parecem ser exercidas por meio da intervenção de dois sistemas distintos: um sistema aproximativo capaz de discriminar e comparar grandes quantidades, desde que elas se encontrem numa relação suficiente, e um sistema preciso que opera de forma precisa mas numa extensão estreita de numerosidade limitada a três ou, no máximo, a quatro elementos. Um debate não resolvido diz respeito à passagem entre esses dispositivos não simbólicos e a aquisição dos números e da aritmética simbólica. Para alguns autores, o sistema aproximativo constitui a base sobre a qual se constrói a sequência de nossas atividades numéricas; para outros, é o sistema preciso porém limitado que estaria na origem de desenvolvimentos posteriores.

Por outro lado, não é proibido pensar que os dois sistemas intervêm no decorrer do desenvolvimento, seja simultaneamente, seja em momentos diferentes.

Os trabalhos de neuroanatomia funcional permitiram identificar um conjunto de estruturas cerebrais implicadas nas atividades numéricas e aritméticas. Inúmeros trabalhos evidenciaram o papel do sulco intraparietal superior (*IPS*) como sede principal da representação semântica dos números. Trabalhos recentes sugerem uma dupla representação semântica, uma em cujo seio a numerosidade seria representada de forma intensiva, com uma ativação proporcional à quantidade apresentada, e outra em que a representação ativada seria seletiva a uma numerosidade, determinados neurônios ou grupo de neurônios reagindo mais a uma dada numerosidade. A localização das representações semânticas dos números no núcleo de estruturas parietais superiores deu origem a um conjunto de hipóteses e de especulações em relação às razões funcionais de tal localização. Entre as funções associadas, postulou-se um papel privilegiado das representações espaciais e da representação dos movimentos dos dedos e das mãos.

#### Implicações para a educação?

O fato de saber que dispomos de sistemas neuronais que tratam a numerosidade e que essa bagagem inicial está localizada em estruturas cerebrais que mais tarde sustentarão em parte a aritmética simbólica é um dado importante e que sugere que algumas crianças discalcúlicas poderiam apresentar dificuldades, desde a mais tenra idade, com tarefas que envolvem competências não simbólicas. Pode-se imaginar que, nos anos vindouros, maior atenção será dedicada, nas escolas, às competências numéricas pré-simbólicas, em virtude, especialmente, de se fazer tão necessário remediá-las. Os trabalhos de neurociência que sugerem a existência de relações entre o tratamento dos números e o espaço, o tratamento dos números e os dedos, entre o tratamento dos números e outras magnitudes e, enfim, o tratamento da numerosidade e o da ordem, abrem campos de pesquisa a explorar. Convém, entretanto, caso se deseje fazer bom uso da neurociência, considerar que, no estado atual de seu desenvolvimento no terreno da cognição numérica, ela permite no máximo sugerir pistas de reflexão e que se trata, para os atores das ciências da educação, de realizar, antes de seguir suas pistas, um trabalho de análise empírica cuidadoso e metódico.

O primeiro impacto dos trabalhos recentes é considerar que determinadas potencialidades preexistem nas crianças muito antes do surgimento das competências simbólicas ou linguageiras precisas. Diversas pesquisas evidenciaram que algumas dessas competências precoces relacionavam-se ao nível de competência em aritmética atingido pelas crianças vários anos depois. Isso foi demonstrado para a aritmética aproximativa (Halberda, Mazzocco & Feigenson, 2008; De Smedt, Verschaffel e Ghesquière, 2009) e para o domínio das gnoses digitais (Fayol, Barrouillet e Marinthe, 1998; Noël, 2005), e pesquisas recentes, mas ainda não publicadas, sugerem igualmente que o domínio das relações de ordem seria também um bom prognosticador do nível aritmético posterior. Alguns autores já começaram, sobre tais bases, a desenvolver programas de treinamento ou reforço para crianças discalcúlicas. Nessa direção, Wilson, Revkin, Cohen e Dehaene (2006) desenvolveram um programa de computador que tem por objetivo reforçar o senso numérico das crianças e que sublinha as relações entre os números e o espaço. Outro programa, desenvolvido por Ramini e Siegler (2008), inspira-se no conceito da linha numérica e exercita as crianças a imaginar a posição exata dos números sobre um dispositivo espacial. Na Suíça, Vilette e seus colaboradores criaram também um programa visando melhorar as relações entre as representações aproximativas e precisas dos números (Vilette, Mawart & Rusinek, 2010, citado em Noël & Rousselle, no prelo). Finalmente, num trabalho recente, Gracia-Baffaluy e Noël (2008) treinaram discriminações digitais com crianças discalcúlicas, com o objetivo de melhorar seus desempenhos numéricos e aritméticos.

Tais ensaios são interessantes, mas devem ser vistos com prudência e não como remédios já aplicáveis. A questão essencial que devemos considerar e resolver, a fim de melhor compreender que procedimentos deveríamos empregar para nos capacitarmos a ajudar as crianças, é a dos mecanismos que permitem a passagem da cognição numérica não simbólica à cognição simbólica. Entrementes, é também interessante que os reeducadores não se esqueçam do que nos foi ensinado por trabalhos anteriores, a saber, a importância da memória de trabalho, dos mecanismos de inibição e da contagem no desenvolvimento das habilidades aritméticas.

#### Referências

- Andres, M., Davare, M., Pesenti, M., Olivier, E., & Seron, X. (2004). Number magnitude and grip aperture interaction. *Neuroreport*, 15, 2773-2777.
- Andres, M., Olivier, E., & Badets, A. (2008). Actions, words and Numbers. A motor contribution to Semantic Processing. Current Directions in Psychological Sciences, 17, 313-317.
- Andres, M., Ostry, D.J., Nicol, F., & Paus, T. (2008). Time course of number magnitude interference during grasping. *Cortex*, 44, 414–419.
- Ansari, D. (2008). Effects of development and enculturation on number representation in the brain. *Nature Reviews Neurosciences*, *9*, 278-291.
- Antell, S. E., & Keating, D. P. (1983). Perception numerical invariance in neonates, *Child Development*, *54*, 695-701.
- Bachtold, D., Baumuller, M. & Brugger, P. (1998). Stimulus-response compatibility in representational space. *Neuropsychologia*, 36(8), 731-735.
- Badets, A., & Pesenti, M. (2010). Creating number semantics through finger movement perception. *Cognition*, 115 (1), 46-53.
- Badets, A., Andres, M., Di Luca, S., & Pesenti, M. (2007). Number magnitude potentiates action judgements. *Experimental Brain Research*, 180, 525–534.
- Barth, H., Kanwisher, N., & Spelke, E. (2003). The construction of large number representations in adults. *Cognition*, 86, 201-221.
- Bijeljac-Babic, R., Bertoncini, J., & Melher, J. (1993). How do four-day-old infants categorize multisyllabic utterances? *Developmental Psychology, 29*, 711-721.
- Brannon, E.M. (2002). The development of ordinal numerical knowledge in infancy. *Cognition*, 83, 223-240.
- Brannon, E.M., & Van de Walle, G.A. (2001). The development of ordinal numerical competence in young children. *Cognitive Psychology, 43*, 53-81.
- Buckley, P.B. & Gillman, C.B. (1974). Comparison of digits and dot patterns. *Journal of Experimental Psychology, 103*, 1131-1136.
- Bullock, M., & Gelman, R. (1977). Numerical reasoning in young children: the ordering principle, *Child development, 48*, 427-434.
- Butterworth, B. (1999). *The Mathematical Brain*. London: Macmillan.
- Chochon, F., Cohen, L., van de Moortele, P. F., & Dehaene, S. (1999). Differential contributions of the left and right inferior parietal lobules to number processing. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 11(6), 617-630.
- Cipolotti, L., Butterworth, B., & Denes, G. (1991). A specific deficit for numbers in a case of dense acalculia. *Brain*, 114 (Pt 6), 2619-2637.
- Cohen Kadosh, R. & Henik, A. (2006). A common representation for semantic and physical properties: a cognitive-anatomical approach. *Experimental Psychology*, 53(2), 87-94.

- Cohen Kadosh, R., Henik, A., Rubinstein, O., Mohr, H., Dori, H., Van de Ven, V., ...Linden, D. (2005). Are numbers special? The comparison system of the humain brain investigated by fMRI. *Neuropsychologia*, 43(9), 1238-1248.
- Cooper, R.G. (1984). Early number development: discovering number space with addition and subtraction. Dans C. Sophian (ed.), *Origins of cognitive skills: The eighteenth annual Carnegie symposium on cognition*, Hillsdale, NJ, Erlbaum, 157-192.
- Crollen, V., Mahe, R., Collignon, O. & Seron, X. (2011). The role of vision in the development of finger-number intercations: Finger-counting and finger-montring in blind children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 109, 525-539.
- De Smedt, B., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2009). The predictive value of numerical magnitude comparison for individual differences in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103, 469-479.
- De Smedt, B., Verschaffel, L., Ghesquière, P. (2009). The predictive value of numerical magnitude comparison for individual differences in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103, 469-479.
- Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. Cognition, 44, 1-42.
- Dehaene, S. (1997). La bosse des maths, Paris, Odile Jacob.
- Dehaene, S. (2009). Origins of Mathematical Intuitions. The case of Arithmetic. The year in Cognitive Neurosciences 2009. *Annals N.Y. Acad. Sci. 1156*, 232-259.
- Dehaene, S., & Changeux, J-P. (1993). Development of elementary numerical abilities: a neuronal model, *Journal of Cognitive Neuroscience*, *5*(4), 390-407.
- Dehaene, S., & Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical Cognition*, 1, 83-120.
- Dehaene, S., & Cohen, L. (1997). Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantities knowledge of arithmetic. *Cortex*, 33, 219–250.
- Dehaene, S., Bossini, S., & Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and number magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, 122, 371-396.
- Dehaene, S., Dupoux, E., & Mehler, J. (1990). Is numerical comparison digital? Analogical and symbolic effects in two-digit number comparison. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 16(3), 626-641.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20, 487-506.
- Dehaene, S., Spelke, E., Pinel, P., Stanescu, R., & Tsivkin, S. (1999). Sources of mathematical thinking: behavioral and brain-imaging evidence. *Science*, 284(5416), 970-974.
- Delazer, M. & Butterworth, B. (1997). A dissociation of number meanings. *Cognitive Neuropsychology*, 14, 613-636.

- Di Luca, S., & Pesenti, M. (2008). Masked priming effect with canonical finger numeral configurations. *Experimental Brain Research*, 185, 27-39.
- Di Luca, S., Grana, A., Semenza, C., Seron, X., & Pesenti, M. (2006). Finger-digit compatibility in Arabic numeral processing. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 59, 1648–1663.
- Di Luca, S., Lefevre, N., & Pesenti, M. (2010). Place and summation coding for canonical and non canonical finger numeral representations. *Cognition*, 117, 95-100.
- Donaldson, M. (1978). Children's Mind. London: Fontana, 6th ed.,
- Donaldson, M. (1982). Conservation: What is the question? *The British Journal of Psychology*, 73, 199-207.
- Fayol, M. (1990). L'enfant et le Nombre, du comptage à la résolution de problèmes. Paris :Delachaux et Niestlé .
- Fayol, M. & Seron, X. (2005). About numerical representations: insights from neuropsychological experimental and developmental studies. In J.I.D. Campbell (Ed) *Handbook of Mathematiacl Cognition*. New York, Psychology Press,pp. 3-22.
- Fayol, M., Barouillet, P., & Marinthe, C. (1998). Predicting arithmetical achievement from neuropsychological performance: A longitudinal study. *Cognition*, 68, 63-70.
- Feigenson, L. and Carey, S. (2003) Tracking individuals via object-files: evidence from infants' manual search. *Developmental Science*, *6*, 568–584.
- Feigenson, L., Carey, S. & Hauser, M. (2002). The representations underlying infants' choice of more: object files versus analog magnitudes. *Psychological Science*, 13 (2), 150-156.
- Fias, W., & Fischer, M. H. (2005). Spatial representation of numbers. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition*. New York: Psychology Press (pp. 43-54).
- Fias, W., Lammertyn, J., Caessens, B., & Orban, G.A. (2007). Processing of abstract ordinal knowledge in the horizontal segment of the intraparietal lobe. *Journal of Neurosciences*, 27, 8952-8956.
- Fias, W., Lammertyn, J., Reynvoet, B., Dupont, P., & Orban, G. A. (2003). Parietal representation of symbolic and nonsymbolic magnitude. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 15(1), 47-56.
- Fischer, M. H. (2006). The future for SNARC could be stark. *Cortex*, 42(8), 1066–1068.
- Fischer, M. H., Castel, A.D., Dodd, M.D., & Pratt, J. (2003). Perceiving numbers causes spatial shifts of attention. *Nature Neurosciences*, *6*, 555-556.
- Fisher, M. H., Shaki, S., & Cruise, A. (2009). It takes only one word to quash the SNARC. *Experimental Psychology*, *56*(*5*), 361-366.

- Fuson, K.S. (1988). Children's counting and concepts of numbers. New York: Springer Verlag.
- Fuson, K.S., Richards, J., Briars, D. (1982). The acquisition and elaboration of the number word sequence. In C.J. Brainerd (ed.), *Children's logical and mathematical cognition. Progress in cognitive development research.* NY: Springer-Verlag
- Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation, Cognition, 44, 43-74.
- Gelman, R., & Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge MA: Harvard University Press.
- Gerstmann, J. (1930). Zur symptomatologie der hirnläsionen im übergangsgebiet der unteren parietal-und mittleren occipitalwindung. *Nervenarzt*, 3, 691-695.
- Gerstmann, J. (1957). Some notes on the Gerstmann syndrome. *Neurology, 7*(12), 866-869.
- Gevers, W., Lammertyn, J., Notebaert, W., Verguts, T., & Fias, W. (2006). Automatic response activation of implicit spatial information: Evidence for the SNARC effect. *Acta Psychologica*, 122, 221-233.
- Gevers, W., Reynvoet, B., & Fias, W. (2003). The mental representation of ordinal sequence is spatially organized. *Cognition*, 87, 87-95.
- Gevers, W., Reynvoet, B., & Fias, W. (2004). The mental representation of ordinal sequence is spatially organized: evidence from days of the week. *Cortex*, 40, 171-172.
- Gilmore, C.K., McCarthy, S.E., & Spelke, E.S. (2007). Symbolic arithmetic knowledge without instruction. *Nature*, 447, 589-592.
- Gruber, O., Indefrey, P., Steinmetz, H., & Kleinschmidt, A. (2001). Dissociating neural correlates of cognitive components in mental calculation. *Cerebral Cortex*, 11(4), 350-359.
- Halberda, J., Mazzocco, M.M.M., & Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, 455, 665-668.
- Holloway, I. D. & Ansari, D. (2009). Mapping numerical magnitudes onto symbols: the numerical distance effect and individual differences in children's mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103, 17-29.
- Hubbard, E. M., Piazza, M., Pinel, P., & Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Review, Neuroscience*, 6(6), 435-448.
- Hung, Y., Hung, D. L., Tzeng, O. J. L., & Wu, D. H. (2008). Flexible spatial mapping of different notations of numbers in Chinese readers. *Cognition*, 106(3), 1441–1450.

- Isaacs, E.B., Edmonds, C.J., Lucas, A. & Gadian, D.G. (2001) Calculation difficulties in children of very low birthweight: a neural correlate. *Brain*, 124, 1701-1707.
- Izard, V., Sann, C., Spleke, E.S. & Streri, A. (2009) Newborn infants perceive abstract numbers . Proceedings of the National Academy of Sciences, 106, 10382-10385.
- Jordan, K.E, & Brannon, E.M. (2006). The multisensory representation of number in infancy. Proceedings of the National Academy of Sciences, 103, 3486-3489.
- Kaufmann, L., Koppelstaetter, F., Delazer, M., Siedentopf, C., Rhomberg, P., Golaszewski, S., ...Ischebeck, A. (2005). Neural correlates of distance and congruity effects in a numerical Stroop task: an event-related fMRI study. *Neuroimage*, 25(3), 888-898.
- Kinsbourne, M., & Warrington, E. K. (1962). A study of finger agnosia. *Brain*, 85, 47-66.
- Kinsbourne, M., & Warrington, E. K. (1963). The developmental Gerstmann syndrome. *Archives of Neurology*, *8*, 490-501.
- Kobayashi T., Hiraki K. & Hasagawa, T. (2005). Auditory-visual intermodal matching of small numerosity in 6<sup>th</sup> month-old infants. *Developmental Psychology*, 8,5),
- Kobayashi, T., Hiraki, K?, Mugitani, R., Hasegawa, T. (2004). Baby arithmetic: one object plus one tone. *Cognition*, 91,(2), 23-34
- Koechlin, E., Dehaene, S., & Melher, J. (1997). Numerical transformations in five-month-old human infants, *Mathematical Cognition*, 3(2), 89-104.
- Lee, K. M. (2000). Cortical areas differentially involved in multiplication and subtraction: a functional magnetic resonance imaging study and correlation with a case of selective acalculia. *Annals of Neurology*, 48(4), 657-661.
- Lipton, J. S., & Spelke, E. S. (2004). Discrimination of large and small numerosities by human infants. *Infancy*, *5*, 271-290.
- Lipton, J.S., & Spelke, E.S. (2003). Origins of the number sense: large-number discrimination in human infants, *Psychological Science*, 14, 396-401.
- Marshuetz, C., & Smith, E. E. (2006). Working memory for order information: multiple cognitive and neural mechanisms. *Neuroscience*, *139*, 195-200.
- Marshuetz, C., Reuter-Lorenz, P. A., Smith, E. E., Jonides, J., & Noll, D. C. (2006). Working memory for order and the parietal cortex: an event related functional magnetic resonance imaging study. *Neuroscience*, *139*, 311-316.
- Mayer, E., Martory, M. D., Pegna, A. J., Landis, T., Delavelle, J., & Annoni, J. M. (1999). A pure case of Gerstmann syndrome with a subangular lesion. *Brain*, 122 (6), 1107-1120.
- Menon, V., Rivera, S. M., White, C. D., Glover, G. H., & Reiss, A. L. (2000). Dissociating prefrontal and parietal cortex activation during arithmetic processing. *Neuroimage*, 12(4), 357-365.

- Moyer, R.S., & Landauer, K. (1967). Time required for judgements of numerical inequality. *Nature*, *215*, 1519-1520.
- Nieder A., Freedman D.J., & Miller E.K. (2002). Representation of the quantity of visual items in the primate prefrontal cortex. *Science*, 297, 1708-1711.
- Nieder, A., & Miller E.K. (2004a). A parieto-frontal network for visual numerical information in the monkey. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 101: 7457-7462.
- Nieder, A., & Miller, E.K. (2003). Coding of cognitive magnitude: Compressed scaling of numerical information in the primate prefrontal cortex. *Neuron*, 37(1):149-57.
- Nieder, A., & Miller, E.K. (2004b). Analog numerical representations in Rhesus monkeys: Evidence for parallel processing. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 16: 889-901.
- Noël, M-P. (2005). Finger gnosia: a predictor of numerical abilities in children? *Child Neuropsychology*, *11*, 413-430.
- Noël, M.P., & Rousselle, L. (in press). How Understanding math learning disabilities could guide math teaching, *British Journal of Educational Psychology*, Conference Monographs Series,
- Pebenito, R. (1987). Developmental Gerstmann syndrome: Case report and review of the literature. *Developmental and Behavioral Pediatrics*, 8, 229-232.
- Pesenti, M., Thioux, M., Seron, X., & De Volder, A. (2000). Neuroanatomical substrates of arabic number processing, numerical comparison, and simple addition: a PET study. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *12*(3), 461-479.
- Piaget, J. & Szeminska, A. (1941) . *La genèse du nombre chez l'enfant*. Neuchatel, Paris : DElachaux et Niestlé.
- Piazza M, Izard V, Pinel P, Le Bihan D, Dehaene S (2004) Tuning curves for approximate numerosity in the human intraparietal sulcus. *Neuron*, 44: 547-555.
- Piazza, M. Pinel, P., Le Bihan, D., Dehaene, S. (2007). A magnitude code common to numerosities and number symbols in the human intraparietal sulcus. *Neuro*n, 53, 293-305.
- Pinel, P., Dehaene, S., Riviere, D., & LeBihan, D. (2001). Modulation of parietal activation by semantic distance in a number comparison task. *Neuroimage*, 14(5), 1013-1026.
- Pinel, P., Piazza, M., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2004). Distributed and overlapping cerebral representations of number, size, and luminance during comparative judgments. *Neuron*, 41(6), 983-993.
- Price, G. R., Holloway, I., Rasanen, P., Vesterinen, M. & Ansari, D. Impaired parietal magnitude processing in developmental dyscalculia. *Current Biology*. 17(24), R1042-R1043.
- Ramani, G. B., & Siegler, R. S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development*, 79(2), 375-394.

- Restle, F. (1970). Speed of adding and comparing numbers. *Journal of Experimental Psychology*, 83, 274-278;
- Rickard, T. C., Romero, S. G., Basso, G., Wharton, C., Flitman, S., & Grafman, J. (2000). The calculating brain: an fMRI study. *Neuropsychologia*, 38(3), 325-335.
- Roitman, J. D., Brannon, E. M., & Platt, M. L. (2007). Monotonic coding of numerosity in macaque lateral intraparietal area. *PLoS Biology*, *5*(8), e208.
- Rourke, B. P. (1993). Arithmetic disabilities, specific and otherwise: A neuropsychological perspective. *Journal of Learning Disabilities*, 26, 214-226
- Santens, S., Roggemans, C., Fias, W. et Verguts, T. (2009). Number Processing Pathways in Human Parietal Cortex. *Cerebral Cortex*, 20, 77-88.
- Sarnecka, B.W. & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. Cognition, 108 (3), 662-674.
- Sarnecka, B.W., Kamenskaya, V.G., Yamana, Y., Ogura, T., Yudovina, Y.B. (2007) From grammatical number to exact numbers: Early meanings of 'one', 'two', and 'three' in English, Russian and Japanese. *Cognitive Psychology*, 55 (2), *Pages 136-168*.
- Seron, X. La neuropsychologie Cognitive. Paris : Que sais-je, PUF.
- Seron, X., & Pesenti, M. (2001). The number sense theory needs more empirical evidence. *Mind and Language*, 16(1), 76–88.
- Seron, X., Pesenti, M., Noel, M. P., Deloche, G., & Cornet, J. A. (1992). Images of numbers, or «When 98 is upper left and 6 sky blue». *Cognition*, 44(1-2), 159-196.
- Shaki, S., & Fischer, M.H. (2008) Reading space into numbers a cross-linguistic comparison of the SNARC effect. *Cognition*, 108, 590–599
- Shuman, M., & Kanwisher, N. (2004). Numerical magnitude in the human parietal lobe; tests of representational generality and domain specificity. *Neuron*, 44, 557-569.
- Siegel, L.S. (1977). The cognitive basis of the comprehension and production of relational terminology. *Journal of Experimental Child Psychology*, 24, 40-52.
- Simon, O., Mangin, J. F., Cohen, L., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2002). Topographical layout of hand, eye, calculation, and language-related areas in the human parietal lobe. *Neuron*, *33*(3), 475-487.
- Simon, T.J., Hespos, D., & Rochat, P. (1995). Do infants understand simple arithmetic? A replication of Wynn (1992), *Cognitive Development*, 10, 253-269.
- Stanescu-Cosson, R., Pinel, P., van De Moortele, P. F., Le Bihan, D., Cohen, L., & Dehaene, S. (2000). Understanding dissociations in dyscalculia: a brain imaging study of the impact of number size on the cerebral networks for exact and approximate calculation. *Brain*, 123(11), 2240-2255.

- Starkey, P., & Cooper, R.G. (1980). Perception of numbers by human infants, *Science*, 210, 1033-1035.
- Starkey, P., Spelke, E.S., & Gelman, R. (1983). Detection of intermodal numerical correspondences by human infants, Science, 222, 179-181.
- Strauss, A., & Werner, H. (1938). Deficiency in the finger schema in relation to arithmetic disability. *The American Journal of Orthopsychiatry*, 8, 719-725
- Strauss, M.S., & Curtis, L.E. (1981). Infant perception of numerosity, *Child Development*, 52, 1146-1152.
- Strauss, M.S., & Curtis, L.E. (1984). Development of numerical concepts in infancy. Dans C. Sophian (ed.), *Origins of cognitive skills: The eighteenth annual carnegie symposium on cognition*, Hillsdale, NJ, Erlbaum, 131-155.
- Turconi, E., & Seron, X. (2002). Dissociation between quantity and order meanings in a patient with Gerstmann syndrome. *Cortex*, 38, 911-914
- Turconi, E., Campbell, J. I., & Seron, X. (2006). Numerical order and quantity processing in number comparison. *Cognition*, *98*, 273-285.
- Turconi, E., Jemel, B., Rossion, B., & Seron, X. (2004). Electrophysiological evidence for differential processing of numerical quantity and order in humans. *Brain Research Cognitive Brain Research*, 21(1), 22-38.
- Van Loosbroek, E., & Smitsman, W. (1990). Visual perception of numerosity in infancy, *Developmental Psychology*, 26(6), 916-922.
- Van Offelen, M.P., & Vos, P.G. (1982). A probabilistic model for the discrimination of visual number. Perception and Psychophysics, 32, 163-170.
- Verguts, T., & Fias, W. (2004). Representation of Number in Animals and Humans: A Neural Model. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 16(9), 1493-1504.
- Walsh, V. (2003). A theory of magnitude: common cortical metrics of time, space and quantity. *Trends in Cognitive Sciences*, 7, 483–488.
- Whalen, J., Gallistel, C.R., & Gelman, R. (1999). Nonverbal counting in humans: The psychophysics of number representation. *Psychological Science*, 10(2), 130-137.
- Wilson, A. J., Revkin, S. K., Cohen, L., & Dehaene, S. (2006). An open trial assessment of "the number race", an adaptative computer game for remediation of dyscalculia. *Behavioral and Brain Functions*, 2, 1-16.
- Wynn, K. (1992a). Addition and subtraction by human infants, *Nature*, 358, 749-750.
- Wynn, K. (1995). Origins of numerical knowledge, *Mathematical Cognition*, 1(1), 35-60.
- Wynn, K. (1996). Infants'individuation and enumeration of actions, *Psychological Science*. *7*(*3*), 164-169.
- Xu, F., & Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants, *Cognition*, 74, B1-B11.

- Zago, L., Pesenti, M., Mellet, E., Crivello, F., Mazoyer, B., & Tzourio-Mazoyer, N. (2001). Neural correlates of simple and complex mental calculation. *Neuroimage*, 13(2), 314-327.
- Zago, I., Petit, L., Tuberlin, M. R., Andersson, F., Vigneau, M., & Tzourio-Mazoyer, N. (2008). How verbal and spatial manipulation networks contribute to calculation: An fRMI study. *Neuropsychologia*, 46(9), 2403-2414.
- Zammarian, L., Ischebeck, A., & Delazer, M. (2009). Neuroscience of larning arithmetic Evidence from brain imaging studies. *Neurosciences and Biobehavioral Reviews*, 33, 909-925.
- Zorzi, M., Priftis, K., & Umilta, C. (2002). Brain damage: neglect disrupts the mental number line. *Nature*, 417, 138-139.

# **Autores-Palestrantes**

Daniel T. Willingham é PhD em Psicologia Cognitiva pela Universidade de Harvard e Professor de Psicologia Cognitiva da Universidade da Virginia, onde leciona desde 1992. Suas pesquisas focam-se nas bases cerebrais da aprendizagem e da memória e em como aplicar esses conhecimentos na educação escolar. É autor da coluna "Ask the Cognitive Scientist" ("Pergunte ao Cientista Cognitivo") do periódico American Educator Magazine. Escreveu também o livro "Why Don't Students Like School? " ("Por que os alunos não gostam da escola?"). Seus trabalhos na área estão traduzidos para mais de dez idiomas.

**Hung-Hsi Wu** é Professor Emérito da Universidade da Califórnia, em Berkeley. Ele pesquisa o ensino de matemática há quase duas décadas, motivado pelos óbvios problemas das escolas nessa área. Participou ativamente da elaboração de políticas públicas para o ensino de matemática no estado da Califórnia, contribuindo na revisão dos currúculos e na elaboração de testes padronizados para o Estado. Foi membro do Comitê Diretor de Matemática do NAEP (2000-2001). Desenvolveu estratégias para capacitação de docentes em serviço e livros didáticos para o ensino de matemática nas escolas. Desde 2000 dá cursos de verão para formação de professores de ensino médio e elementar.

William Schmidt é Doutor pela Universidade de Chicago e pesquisador do Instituto de Pesquisa Matemática e Educação Científica da Universidade Estadual de Michigan. É codiretor do Centro de Políticas Educacionais e diretor do projeto Promoção de Promoção de Resultados Rigorosos na Educação em Matemática e em Ciências. Seus trabalhos atualmente se centram em pesquisas sobre a preparação do professor e os efeitos do programa sobre o desempenho acadêmico. É membro da Academia Nacional de Educação e da Associação Americana de Pesquisa em Educação (AERA).

Xavier Seron é Professor emérito e pesquisador em neurociências do Departamento de Neuropsicologia da Universidade Católica de Louvain, na Bélgica. Criou o centro de reabilitação neuropsicológica dentro do Departamento de Neurologia da Universitaires Saint-Luc Cliniques. Seus principais interesses são a reabilitação cognitiva, a análise neuropsicológica do cálculo e o processamento dos números. É autor de mais de 250 artigos científicos. Um de seus livros trata da detecção precoce de dificuldades específicas da aprendizagem de matemática nos primeiros anos de escola. É membro fundador da Sociedade de Neuropsicologia em língua francesa, que presidiu de 1986 a 1988.

#### Coordenador

João Batista Araujo e Oliveira é psicólogo e doutor em Educação pela Florida State University e atualmente presidente do Instituto Alfa e Beto. Dedicou a maior parte de sua vida acadêmica e profissional a questões ligadas à educação. Publicou dezenas de artigos científicos, livros técnicos e coleções de livros didáticos. Foi diretor do IPEA (Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada) em Brasília, funcionário do Banco Mundial em Washington, perito da Organização Internacional do Trabalho em Genebra e Secretário Executivo do MEC. Nos últimos 15 anos, vem desenvolvendo projetos voltados para o sistema público de ensino.

# Coleção IAB de Seminários Internacionais.

Ciclo de Seminários Internacionais - Educação no Século XXI:







## Coleção IAB Seminários Internacionais:



PROFISSÃO PROFESSOR: O que funciona em sala de aula



LEITURA DESDE O BERÇO: Políticas Sociais Integradas para a Primeira Infância



O Ensino da Matemática nas Séries Iniciais